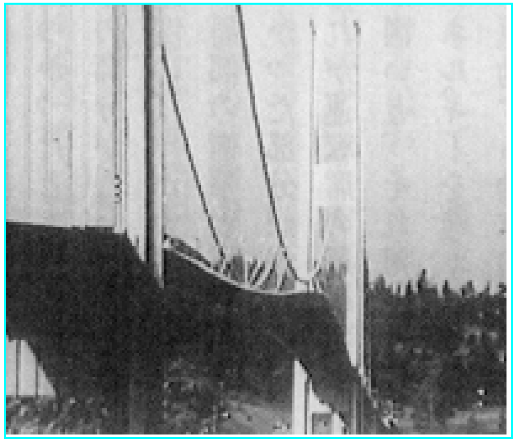
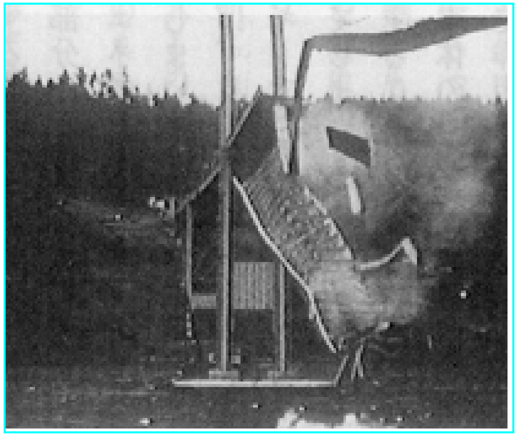
진동의 기초

Fundamentals of Vibration

양보석 교수
부경대학교 기계공학부

♣ **진동(떨림) : 움직일 진(振) 움직일 동(動)**

- 같은 모양으로 반복하여 흔들려 움직임
- 하나의 물리적인 양(量), 곧 물체의 위치, 전류의 세기, 기체의 밀도 따위가 일정한 시간마다 되풀이하여 변화함, 또는 그와 같은 현상

♣ **광의적 해석 (물리학적 해석):**

- 물체의 반복적인 운동

  예) 단진자(pendulum) 운동, 전자(electron)의 운동, 천체의 운동, 배의 rolling, 파동(wave motion) 등
- **Oscillation**

♣ **협의적 해석 (기계공학적 해석):**

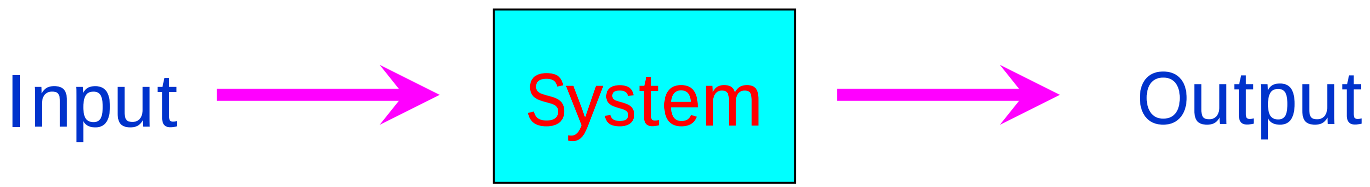
- 기계 구조물의 반복적인 운동 (탄성 변형에너지 수반)
- 태엽 시계, 판의 떨림, 기계 구조물 진동
- 기계, 중공업 분야 : 수 Hz ~ 수 kHz의 주파수 범위
- 선박 (대형 구조물)의 경우 : 주로 1 Hz ~ 100 Hz의 범위
- **Vibration**

계의 정의

♣ **계(^시스템, system) :**

- 입력과 출력이 정의될 수 있으며, 수학적으로 모델링이 되어진 대상물
- 시스템의 범위는 해석자의 주관적이고 적절한 관점에 의해 한정됨
- 또는 수학적 해석의 대상물
- 장치(device)의 관련 부분 및 구성 부분 또는 그 어느 한쪽 부분의 집합체**(ISO 규격)**

  예: 회전체, 베어링, 베어링대, 기초 등으로 구성된 복합체



♣ **해석(analysis) : 시스템을 수학적으로 이해하는 행위.**

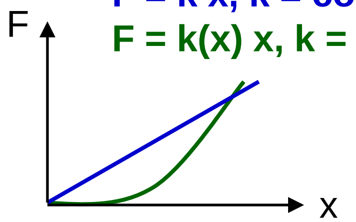
시스템의 특성을 파악하고 거동을 예측 할 수 있음.

계의 정의

입력 → **계** → 출력

$F = k\,x$, k = constant

$F = k(x)\,x$, $k = ax + bx^2$



- 선형(線形)시스템 (Linear system)
- 비선형(非線形)시스템 (Non-linear system)
- 시불변(時不□)시스템 (Time-invariant system)
- 시변(時□)시스템 (Time-variant system)

♣ 선형계 (linear system)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

- 응답이 가진력의 크기에 비례하는 계
- 각 요소의 동특성이 정수 계수를 가지는 선형 미분방정식의 집합으로 표현 가능
- 중첩의 원리가 적용될 수 있는 계

♣ 시변계 (time-variant system)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

- 각 요소의 동특성이 시간의 함수인 계수를 가지는 계

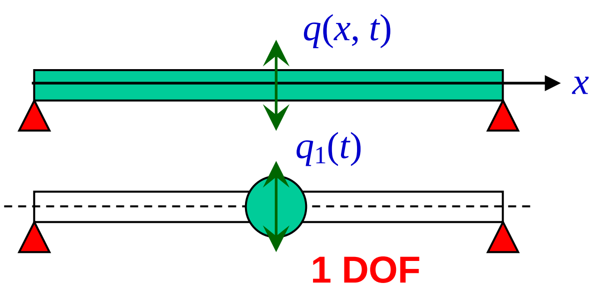
  예: 비대칭 회전축, 승강기 로프 등의 강성 변화 k(t)

♣ 진동계(vibrating system) :

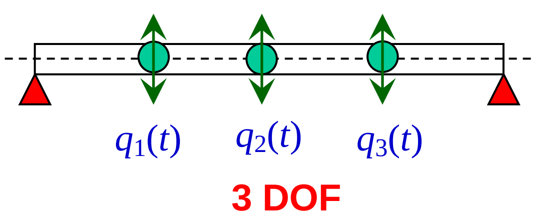
- 입력이 동적인 힘이고, 출력이 진동으로 나타나는 시스템
- 질량(mass), 강성(stiffness), 감쇠(damping)의 정의로 구성된 물체의 집합체

- 1자유도계(1 degree of freedom system) : 어느 순간에 계의 구성을 완전하게 정의하기 위해 단지 하나의 독립된 좌표가 필요한 계
- 다자유도계(multi-degree of freedom system) : 어느 순간에 계의 구성을 완전하게 정의하기 위해 2개 또는 그 이상의 독립된 좌표가 필요한 계
- 이산계(불연속계) (discrete system) : 계의 구성을 특정 지우기 위해 유한 수의 좌표를 필요로 하는 계
- 연속계(분포계) (continuous system) : 무한 수의 가능한 독립된 구성을 가지는 계
  연속공간변수들의 함수로 특정

입력(가진력) → **진동계** → 출력(진동)



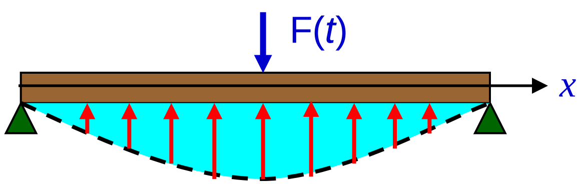
- 1자유도 시스템
- 다자유도 시스템
- 이산(불연속) 시스템
- 연속 시스템



♣ 불연속 모델과 연속 모델의 비교

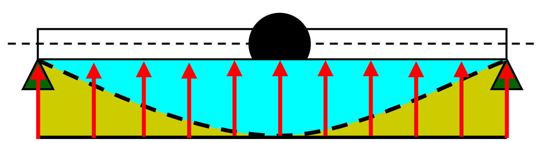
Items	Continuous model	Discrete model
Equation of motion	Partial differential equation	Ordinary differential equation
Variables	Time, geometry (x, y, z)	Time only
Solution accuracy	Exact solution	Approximate solution
Solution type	Analytical solution	Numerical solution
Solution procedure	Very complex, limited	Easy, Computer used

Continuous model



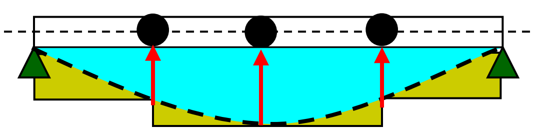
Inertia force distribution

Discrete model (1 DOF)



Over-estimated

Discrete model (3 DOF)



Over-estimated, better

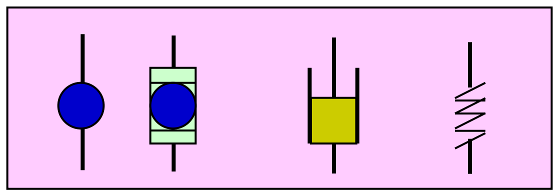
가진력

외력 → **진동계** → **진동**

- 조화 가진(**harmonic forces**)
- 주기적 가진(**periodic forces**)
- 충격 가진(**impulsive forces**)
- 랜덤 가진(**random forces**)

- 질량(**mass**)
- 강성(**stiffness**)
- 감쇠(**damping**)

- 자유진동(**free vibrations**)
- 강제진동(**forced vibrations**)
- 자려진동(**self-excited vibrations**)
- 고유진동수(**natural frequency**)
- 고유모드(**natural mode**)

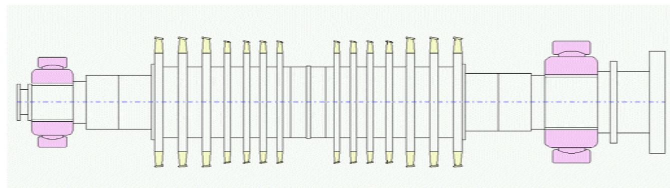


- 질량(mass) : 운동변화에 저항하는 척도인 관성력(inertia force)을 표시
  요소의 질량(질량관성모멘트)으로 표시
- 강성(stiffness) : 대응하는 탄성요소의 병진(회전) 변위 x의 변화에 대한 힘(모멘트) F의
  변화 비(k = F/x)로서 탄성복원력(elastic restoring force)을 표시
- 감쇠(damping) : 시간 또는 거리에 따른 에너지의 소산(dissipation)으로, 시간에 따른
  진폭의 점진적인 감소를 나타내는 감쇠력(damping force)표시:
- 선형 점성감쇠 : 크기는 요소의 진동속도에 비례하고 진동속도와 반대 방향으로 작용
  하는 저항력을 발생

♣ 진동계의 예

$F(t)$

충격력
지 진
•
•

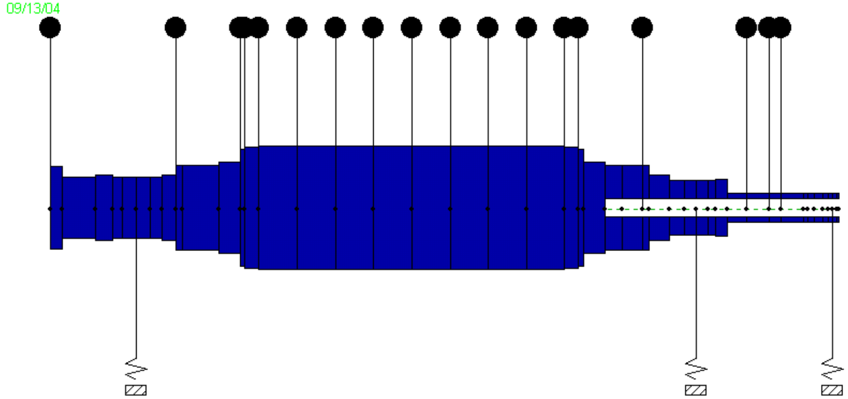


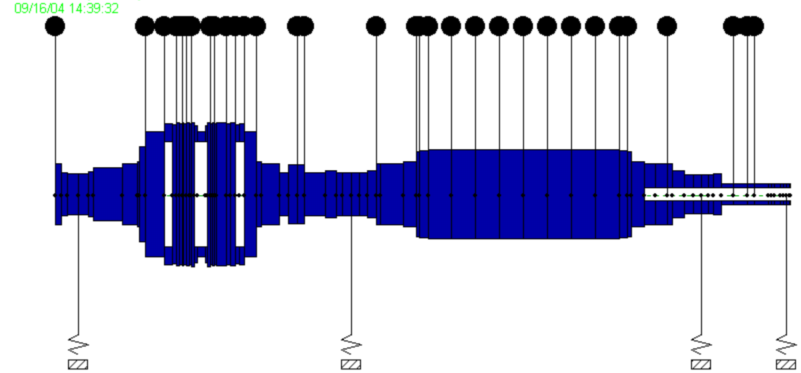
$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\,\mathbf{q}=\mathbf{F}(t)$$

진동계의 수학적 모델링

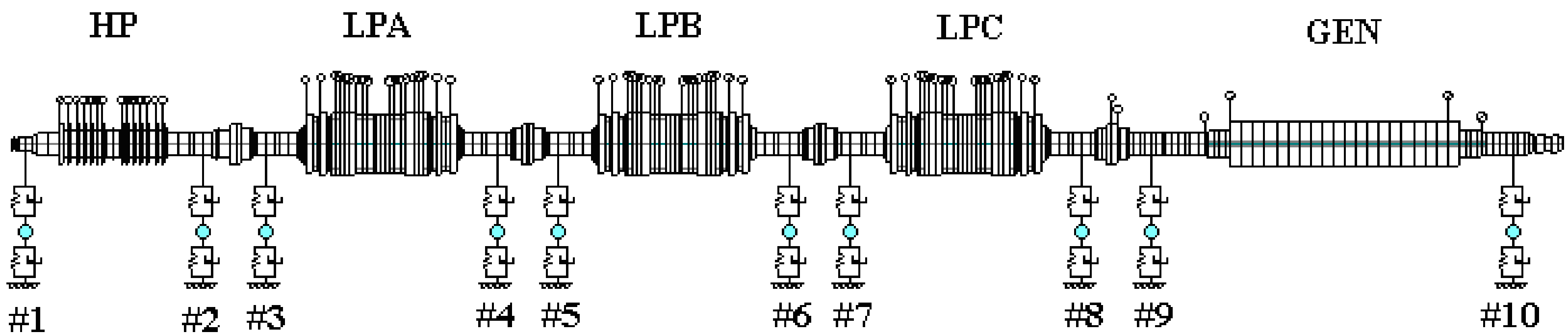
$q(t)$

변 위
각변위
속도
가속도

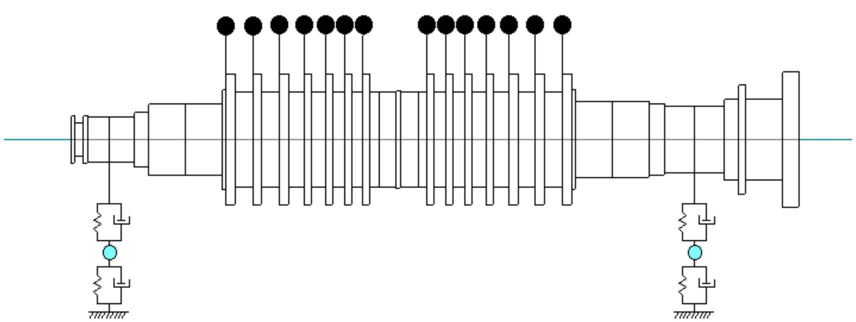




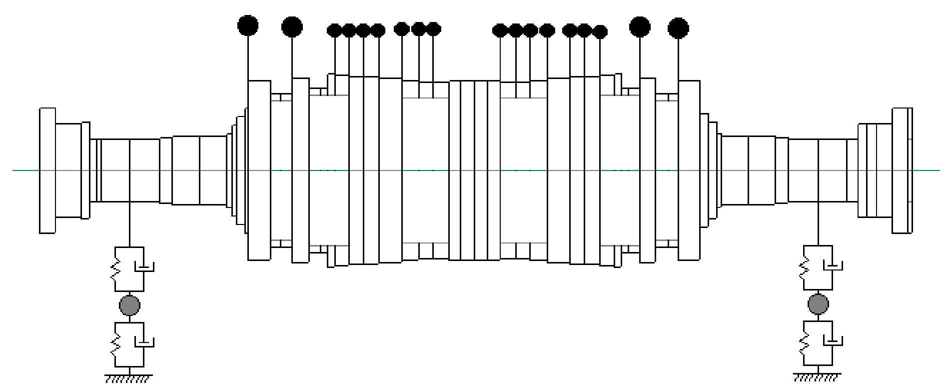
♣ 진동계의 예



Turbine/Generator Rotor System



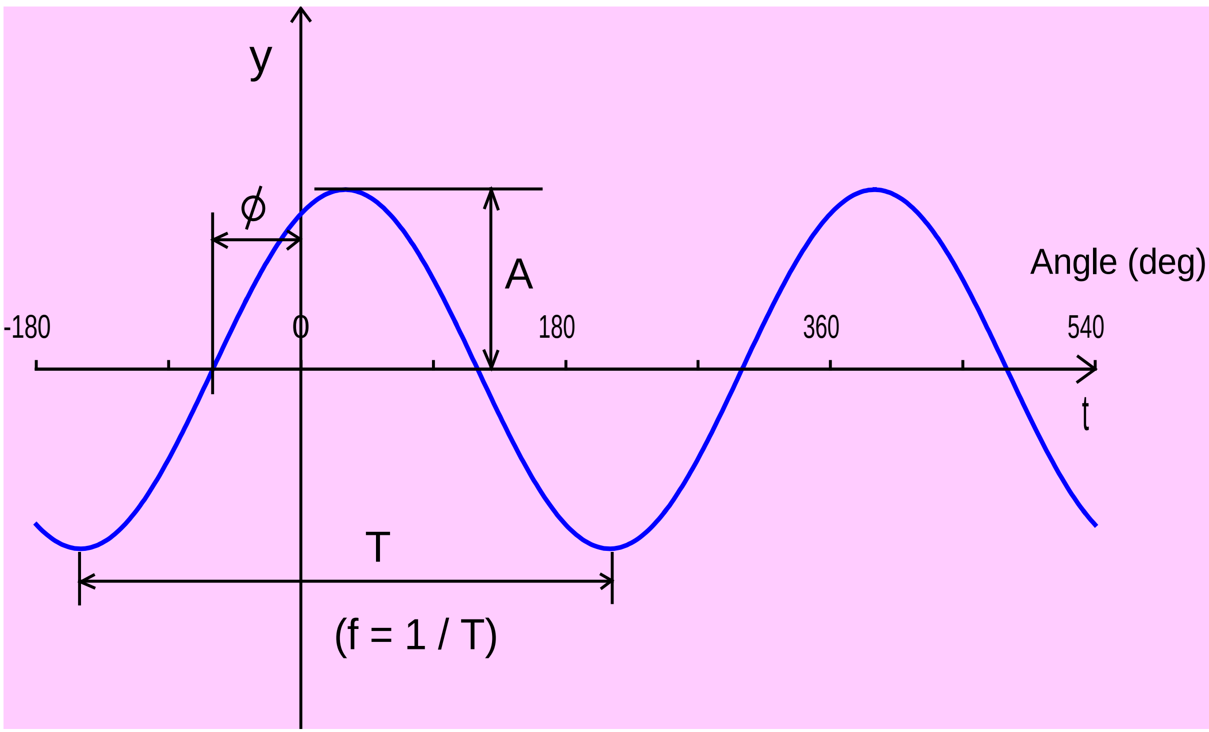
HP Rotor



LP Rotor

♣ **정현파(sine wave)의 진폭 :** $y = A\sin(2\pi ft + \phi)$

- **주파수** (frequency) f : 단위 시간에 진동하는 횟수
- **크기** (amplitude) A : 진폭, 진동의 크기
- **위상** (phase) f : 기준점 혹은 진동파형 사이의 상대각



진동 주파수(진동수) : f

♣ **단위(Unit) :**

- **Hz** (Hertz) : **1초당 진동하는 회수(cps ; cycle per second), 보통 f로 표기**
- **cpm** (cycle per minute) : **1분당 진동하는 회수, 보통 N 또는 n으로 표기**

$$N = 60f \quad \text{(cpm)}$$

♣ **각 진동수** (angular frequency) :

- 진동수에 해당하는 각속도, 보통 **ω (omega)**로 표기

$$\omega = 2\pi f \quad \text{(rad/s)}$$

♣ **주기** (period) :

- **1**회 반복운동(진동)을 하는 시간
- 주파수 **(Hz)**의 역수

$$T = 1/f \quad \text{(s)}$$

진동의 크기(magnitude)

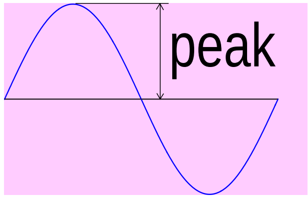
❑ **물리량**에 따라

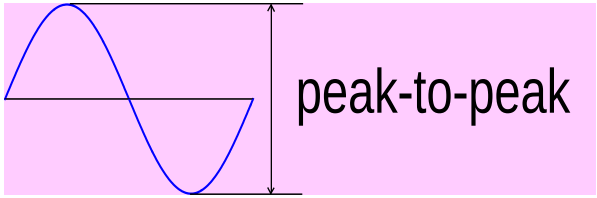
- 진동 변위(displacement), 속도(velocity), 가속도(acceleration)
- 기타 진동으로 인한 압력, 응력, 힘, 토크 등

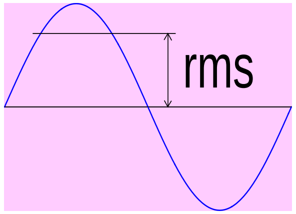
❑ **표현 방법**에 따라

- **peak** 또는 **0-to-peak(편진폭, p)** : 속도, 가속도에 사용
- **peak-to-peak (전진폭, 양진폭, p-p)** : 변위에 사용
- **rms (root mean square, 실효치)** : 변위, 속도, 가속도에 사용

예, 정현파(= 0.707× peak)

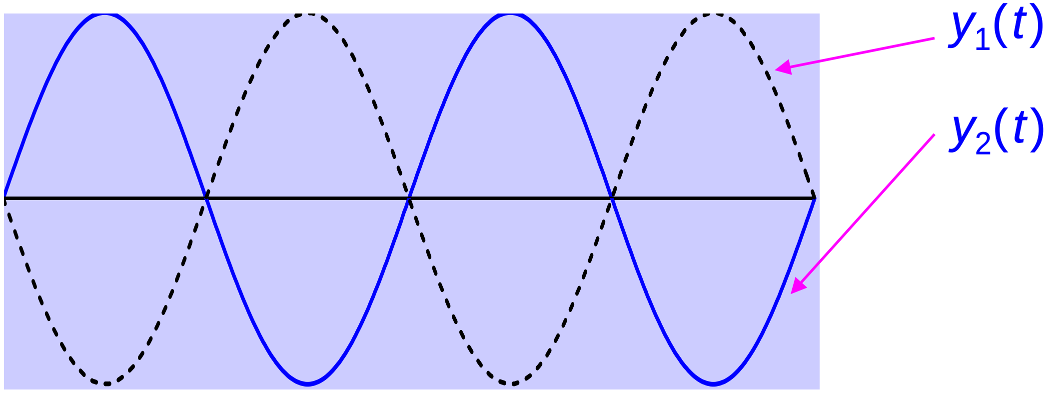






진동의 위상(Phase)

- 진동 신호 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 사이의 각도 차이
- 단위: deg, rad
- 일반적으로 고려하지 않음
- 중요하게 고려하는 경우
  - 진동 특성을 파악하고자 할 때
  - 진동을 제어하고자 할 때



- **일반적 운동 신호에서의 관계**

속도는 변위의 미분 :

$$v = dy / dt$$

단위: mm/s, IPS(in/s)

가속도는 속도의 미분 :

$$a = dv / dt = d^2 y / dt^2$$

단위: m/s², g(또는 G)

- **단순 조화진동에서의 관계**

$$y = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$v = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Equation of Motion

- **Newton의 제 2법칙:** $\Sigma F = ma$
- Newton 방정식 변형: $ma = \Sigma F$ 혹은 $m\, d^2x/dt^2 = \Sigma F$
- **진동계의 Newton 방정식(운동방정식)**

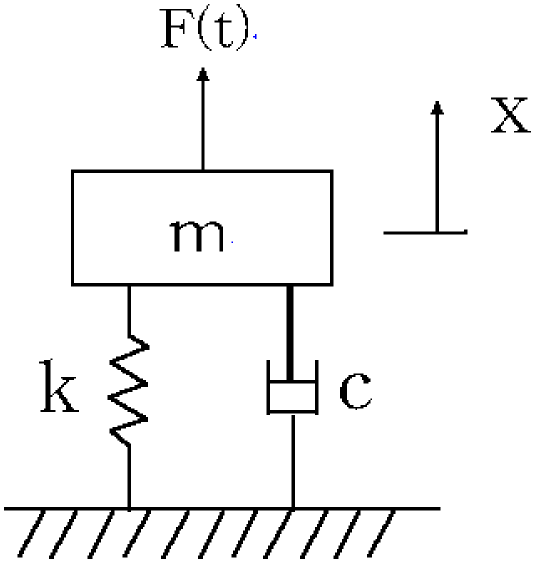
$$m\, d^2x/dt^2 = \Sigma F = F_{spring} + F_{damping} + F_{external}$$

$$= -kx - c\, dx/dt + F(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Isaac Newton

1642-1727



단진동계 모델

구성 요소	직선 운동계		회전 운동계	
	차 원	단 위	차 원	단 위
M	질량 (병진 관성)	kg	질량관성모멘트 (회전 관성)	kg·m^2
C	병진 감쇠 (힘/속도)	N·s/m	회전 감쇠 (모멘트/각속도)	N·m·s/rad
K	병진 강성 (힘/변위)	N/m	회전 강성 (모멘트/각도)	N·m/rad

외력과 감쇠가 없다고 가정하면(F = 0, c =0), **운동방정식**은

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

해를 $x(t) = X \sin \omega t$ 라 하고, 2회 미분하면

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X \sin \omega t$ 가 되고, 이들을 운동방정식에 대입하면

$$(-m\omega^2 + k)X \sin \omega t = 0$$

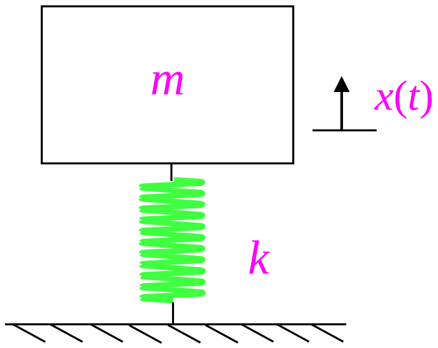
X가 0이 아니기 위한 조건(의미 있는 해를 가지기 위한 조건)은

$$-m\omega^2 + k = 0$$ 또는 $$\omega = \sqrt{k/m}$$

$\omega = \omega_n$ ⟵ **고유진동수**(Natural frequency)

1 자유도계의 자유진동 응답

♣ 비감쇠 진동 모델

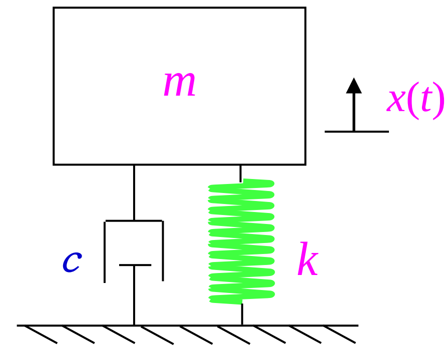


$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

$$x(t) = a_1 e^{+j\omega t} + a_2 e^{-j\omega t}$$

♣ 감쇠 진동 모델



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$x(t) = ae^{\lambda t}$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(a_1 e^{+j\omega\sqrt{1-\zeta^2}t} + a_2 e^{-j\omega\sqrt{1-\zeta^2}t} \right)$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(a_1 e^{+\omega\sqrt{\zeta^2-1}t} + a_2 e^{-\omega\sqrt{\zeta^2-1}t} \right)$$

$$x(t) = \left(a_1 + a_2 t\right)e^{-\omega t}$$

$$x(t) = a_1 e^{+j\omega t} + a_2 e^{-j\omega t}$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(a_1 e^{+j\omega\sqrt{1-\zeta^2}t} + a_2 e^{-j\omega\sqrt{1-\zeta^2}t}\right)$$

$$x(t) = A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right)$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_d t + \phi)$$

$$A_1 = a_1 + a_2 \qquad A_2 = (a_1 - a_2)j$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad \phi = \tan^{-1}(A_1 / A_2)$$

$$a_1 = \frac{A_1 + A_2 j}{2} \qquad a_2 = \frac{A_1 - A_2 j}{2}$$

적분상수는 초기조건에 의해 결정되며
자유진동은 초기조건에 의해 발생한다.

자유진동 응답

$\omega_n = 2\pi f_n = (\text{elasticity / inertia})^{1/2}$

$x(t) = X \cos(\omega_n t + \phi)$

- $\text{PE} = ½\, k\, x^2 = ½\, k\, X^2 \cos^2(\omega_n t + \phi)$
- $\text{KE} = ½\, mv^2 = ½\, m\, (dx/dt)^2$

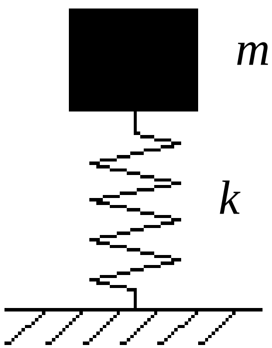
  $= ½\, m\, \omega_n^2 X^2 \sin^2(\omega_n t + \phi)$
- $\text{TE} = \text{P.E.} + \text{K.E.} = ½\, k\, x^2 + ½\, mv^2$

  $= ½\, k\, X^2 \cos^2(\omega_n t + \phi)$

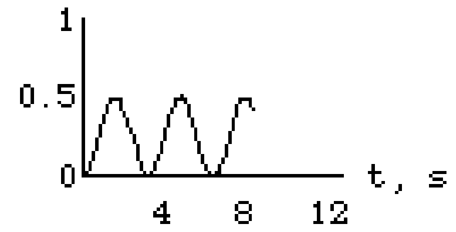
  $+ ½\, m\, \omega_n^2 X^2 \sin^2(\omega_n t + \phi)$

  $= ½\, k\, X^2 (\cos^2 \omega_n t + \sin^2 \omega_n t)$

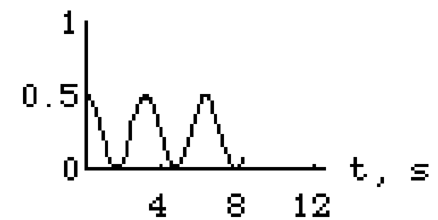
  $= ½\, k\, X^2 = ½\, mV^2$



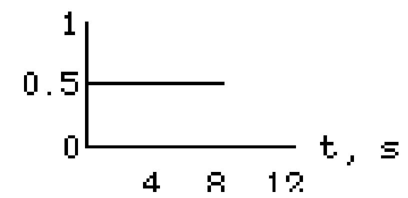
Kinetic energy (KE)



Potential energy (PE)



Total energy (TE)



고유진동수 (natural frequency)란 ?

- 진동하는 물체의 고유한 성질
- 외력이 없는 상태에서의 떨림(흔들림) 주파수
- 질량 (*m*)과 강성(*k*)의 함수

각(원) 고유진동수 : $\omega_n = \sqrt{k/m}$ (rad/s)

고유진동수 : $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (Hz)

왜 중요한가 ?

- 공진(resonance), 위험속도(critical speed)

- **비감쇠 진동 모델**

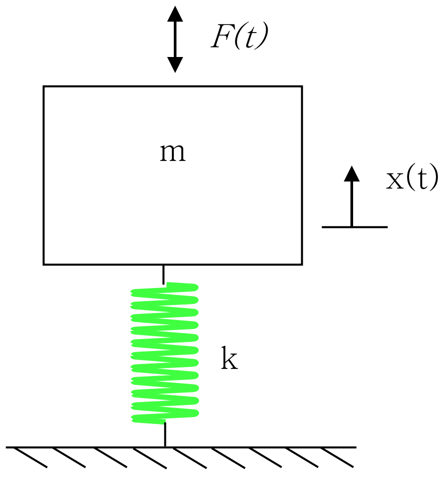
  Undamped Vibration Model

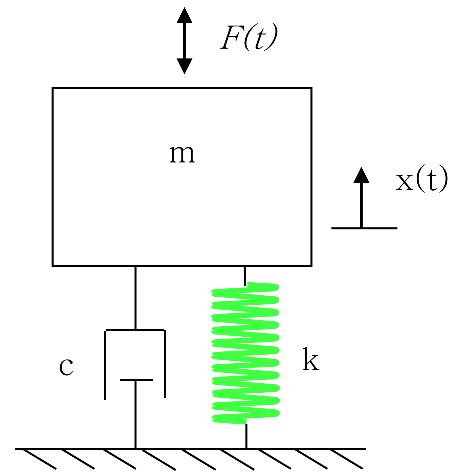
- **감쇠 진동 모델**

  Damped Vibration Model

Harmonic excitation

$$\boxed{F(t) = F_0 \cos \omega_{dr} t}$$

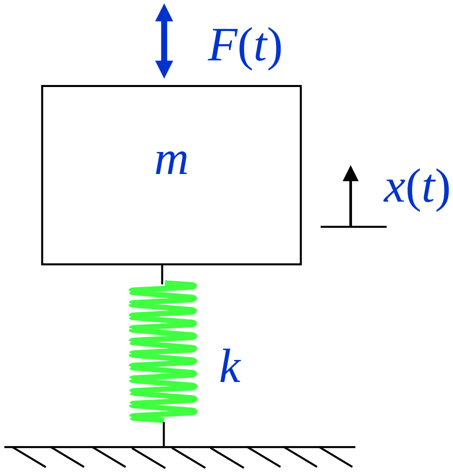




$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega_{dr} t$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega_{dr} t$$

• 비감쇠 진동 모델 (Undamped Vibration Model)



$$f_0 = \frac{F_0}{m} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega_{dr} t$$

$$x_p = A_0 \cos \omega_{dr} t$$

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_n^{\ 2} - \omega_{dr}^{\ 2}} \cos \omega_{dr} t$$

$$x_h(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t$$

$$x(t) = \underbrace{A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t}_{\text{Free response}} + \underbrace{\frac{f_0}{\omega_n^{\ 2} - \omega_{dr}^{\ 2}} \cos \omega_{dr} t}_{\text{Forced response}}$$

$$x_0 = x(0) = A_2 + \frac{f_0}{\omega_n^{\ 2} - \omega_{dr}^{\ 2}} \qquad v_0 = \dot{x}(0) = \omega_n A_1$$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + \left(x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^{\ 2} - \omega_{dr}^{\ 2}}\right)\cos\omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^{\ 2} - \omega_{dr}^{\ 2}}\cos\omega_{dr} t}$$

- 비감쇠계이므로, **자유진동응답은 계속 존재**
- 2개 주파수(ω_n, ω_{dr})이 **합성된 파형**(2개 피크)

예제 :

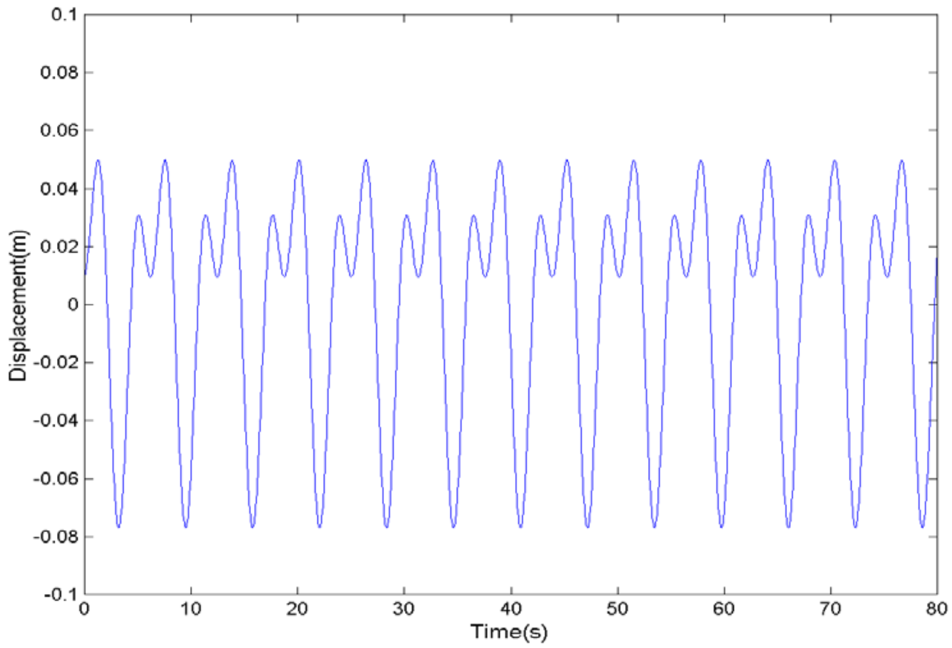
$x_0 = 0.01$ m

$v_0 = 0.01$ m/s

$\omega_n = 1$ rad/s

$\omega_{dr} = 2$ rad/s

$f_0 = 0.1$ N/kg



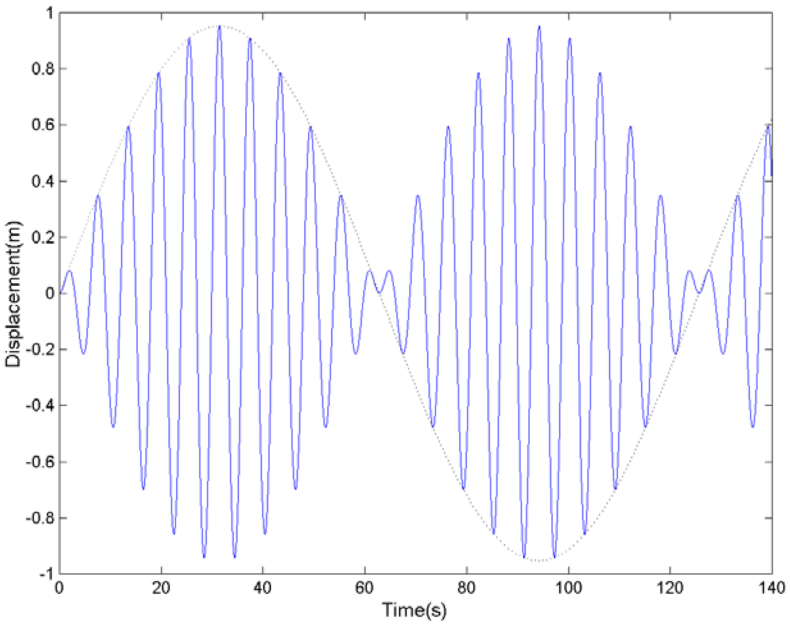
울림(Beat)

- 2개 주파수($\omega_n \approx \omega_{dr}$)가 거의 같은 경우에 발생
- 예, 공진 영역, 동일 기초에 설치된 유도전동기

$x_0 = v_0 = 0$로 가정

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_{dr}^2}\left(\cos(\omega_{dr} t) - \cos(\omega_n t)\right)$$

$$x(t) = \frac{2f_0}{\omega_n^2 - \omega_{dr}^2}\sin\left(\frac{\omega_n - \omega_{dr}}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_n + \omega_{dr}}{2}t\right)$$

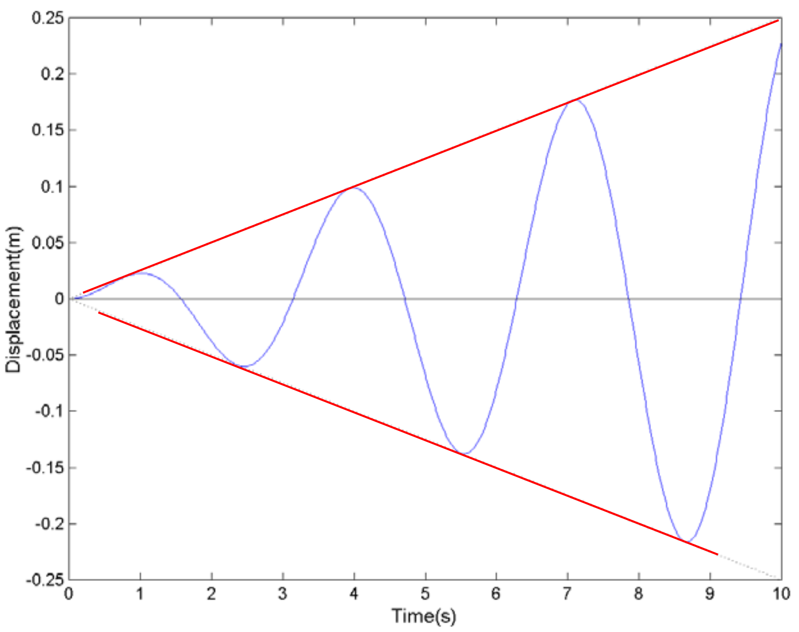


- 울림주파수 : 2개 주파수의 차($f_n - f_{dr}$)

$$\Delta f = \left| f_n - f_{dr} \right| = \frac{1}{2\pi}\left|\omega_n - \omega_{dr}\right|$$

공진(resonance)

- 2개 주파수($\omega_n = \omega_{dr}$)가 같은 경우에 발생
- 외력 진동수와 계의 고유진동수가 일치
- 피크 진폭이 시간에 따라 선형적으로 증가
- 매우 위험한 상태
- 회전체와 정지부의 접촉 및 파손사고 초래



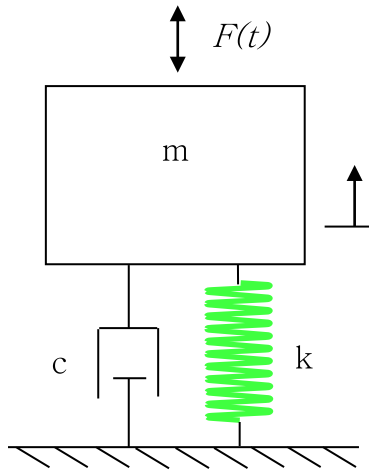
$$x_p(t) = tA_0 \sin \omega_{dr} t$$

$$x_p(t) = \frac{f_0}{2\omega_n} t \sin \omega_{dr} t$$

$$x(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t + \frac{f_0}{2\omega_n} t \sin \omega_{dr} t$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t + \frac{f_0}{2\omega_n} t \sin \omega_{nr} t$$

- **감쇠 진동모델 (Damped Vibration Model)**



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos\omega_{dr} t$$

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \cos\omega_{dr} t$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega_{dr} t - \phi)$$

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n{}^2 - \omega_{dr}{}^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_{dr})^2}} \cos\left(\omega_{dr} t - \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n\omega_{dr}}{\omega_n{}^2 - \omega_{dr}{}^2}\right)$$

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_d t + \theta)}_{\text{Forced response}} + \underbrace{A_0\cos(\omega_{dr} - \phi)}_{\text{Free response}}$$

$$x(t) = \underline{Ae^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_d t + \theta)} + \underline{A_0\cos(\omega_{dr} - \phi)}$$

과도응답

Free response/
Transient response

정상상태응답

Forced response/
Steady state response

Amplification factor (dynamic/static)

$$A_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n{}^2 - \omega_{dr}{}^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_{dr})^2}}$$

$$\frac{A_0 k}{F_0} = \frac{A_0\omega_n{}^2}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_{dr}{}^2)^2 + (c\omega_{dr})^2}}$$

Phase angle

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n\omega_{dr}}{\omega_n{}^2 - \omega_{dr}{}^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{c\omega_{dr}}{k - m\omega_{dr}{}^2}$$

조화 강제 진동 응답

- **운동방정식 :** $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$

- **특해 :** $x = x_0 \sin(\omega t - \phi)$ 라 할 때,

Static response

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{F_0 / k}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega^2)^2]^2 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega}\right) = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_r} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

감쇠비(damping ratio)

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{f}{f_n}$$

주파수비(frequency ratio)

- 동적 진폭배율(확대율) : 정적 변위에 대한 동적 변위의 비

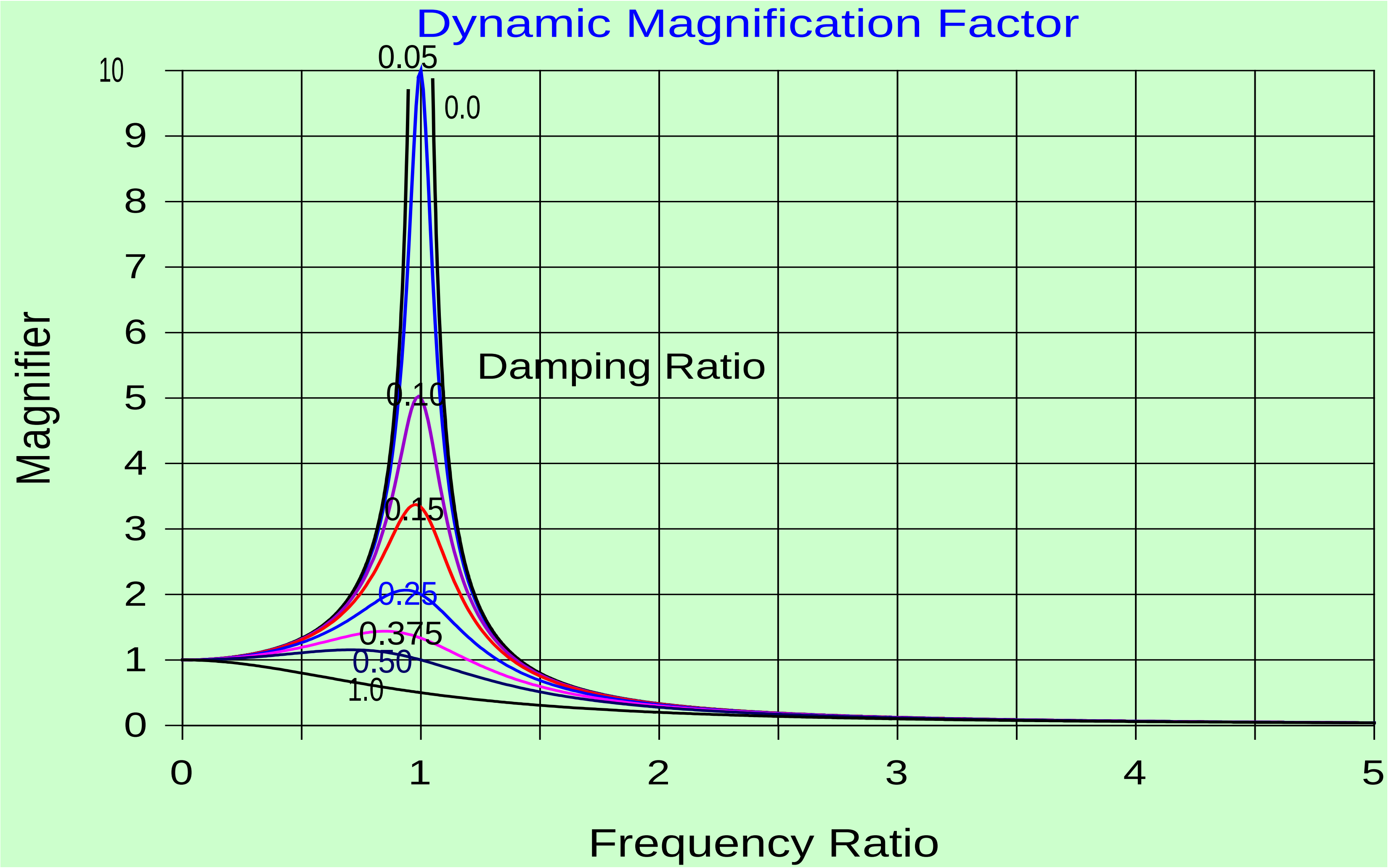
$$M = \frac{x_0}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1-(f/f_n)^2]^2 + [2\zeta(f/f_n)]^2}}$$

- 위상 차 : 가진력에 대한 변위 응답의 지연 위상차

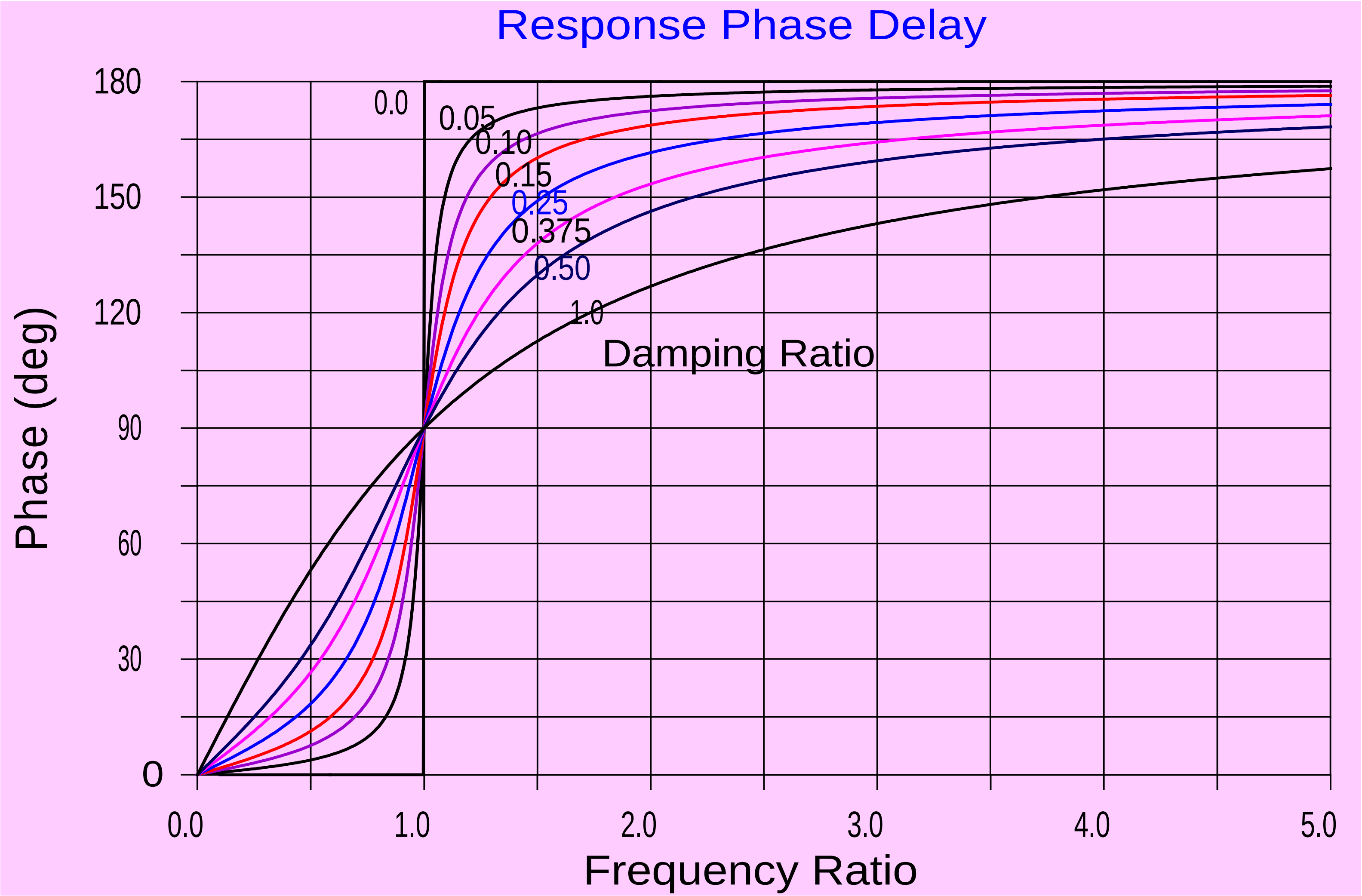
$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta(f/f_n)}{1-(f/f_n)^2}$$

- 주파수비 f/f_n 와 감쇠비 ζ 의 함수

동적 진폭 배율(확대율)



Dynamic Magnification Factor
0.05
0.0
Damping Ratio
0.10
0.15
0.25
0.375
0.50
1.0
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Magnifier
0
1
2
3
4
5
Frequency Ratio


Response Phase Delay
Phase (deg)
180
150
120
90
60
30
0
0.0
0.05
0.10
0.15
0.25
0.375
0.50
1.0
Damping Ratio
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
Frequency Ratio

♣ 공진(resonance)이란 ?

- 가진력의 주파수 f 와 고유진동수 f_n 이 일치 ($f = f_n$)하는 것을 말함
- 일반적으로 진동의 크기가 증폭

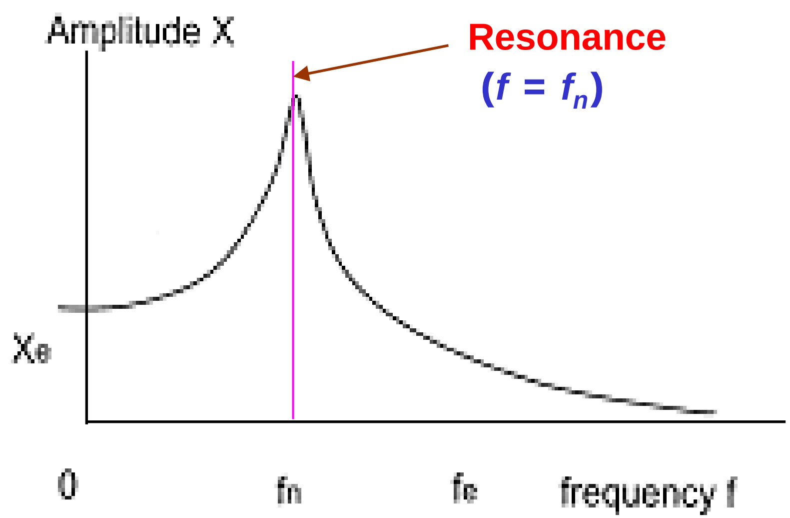
♣ 공진점에서의 동적 배율(공진배율) (quality factor: *Q* factor)

$$Q = 1/2\zeta$$

♣ 감쇠력의 영향

- 공진 영역 부근에서 민감하게 작용
- 감쇠비가 작을수록 진동 진폭이 크다
- 비공진 영역에서는 크게 영향이 없다

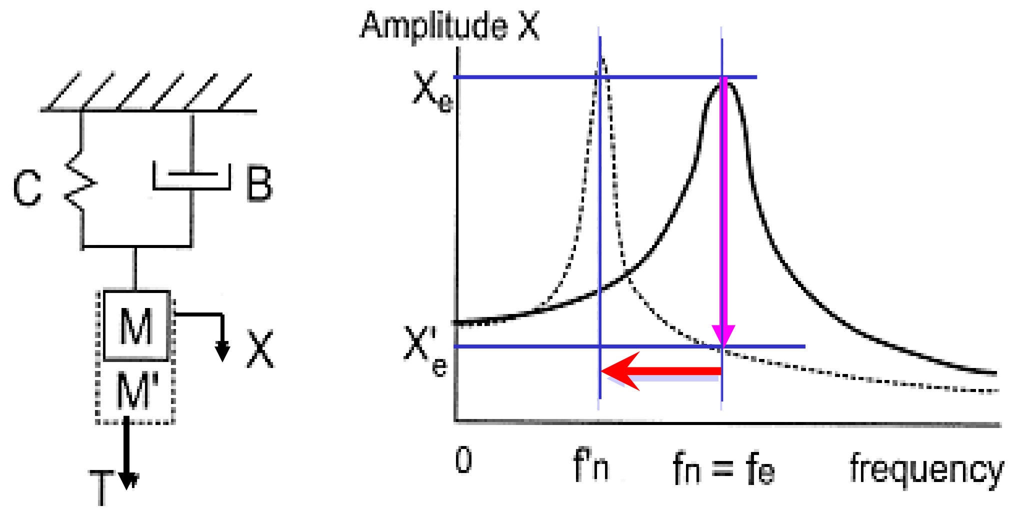
- 계의 고유진동수와 기진주파수가 일치하는 경우, 공진(resonance)이 발생
- 공진 주파수영역 부근에서는 응답이 동적으로 증폭되어 진동 진폭이 증가
- 이 진폭은 진동계의 감쇠의 크기에 의해서만 제한
- 공진 상황은 위험하며 회피해야만 함
- 그림은 주기적인 외력 *F* 가 가해지는 경우, 1자유도계의 주파수에 대응하는 응답 *X* 를 나타냄



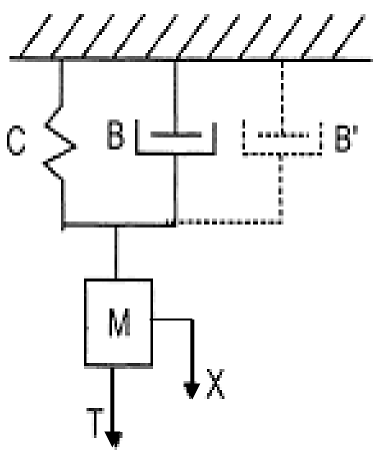
진동진폭 곡선

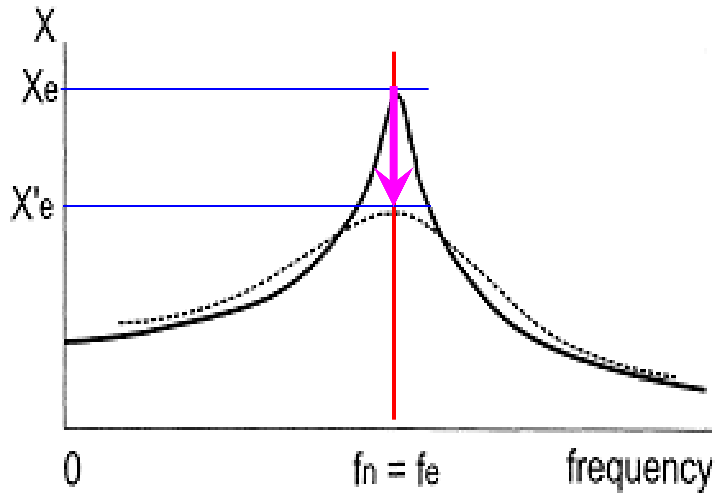
- 공진 문제를 해결하는 방법 : 기본적으로 2가지 방법이 있음.
- 첫째 방법: 발생된 진동 피크가 허용치 이내로 되도록 하기 위해 기계의 일반적인 운전속도 영역 내에서 공진 피크가 발생하지 않도록 계(system)를 수정하는 방법
- 단진동계에서 계의 구성을 수정한다는 것은 질량과 강성의 변화를 의미
- 이러한 수정은 운전속도에서 진폭을 낮추게 되며 계의 고유진동수에 직접적으로 영향을 미침
- 그림에서 질량 *M* 이 *M'*로 증가되었으며, 고유진동수 f_n 은 f_n' 로 이동
- 만약 가진주파수 f_e 가 f_n 과 같다면, 즉 공진인 경우 대응되는 응답 X_e 은 최대값을 갖게 될 것임. 계의 수정에 의해 동일주파수에서 응답은 X_e' 로 감소

고유진동수의 변경



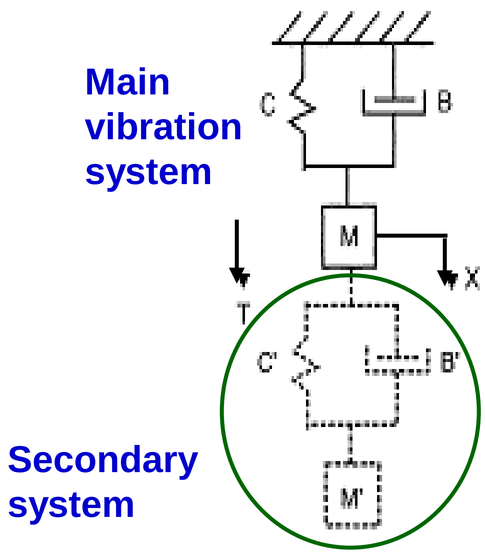
- 공진영역 진폭 *X* 를 줄이기 위한 다른 방법은 감쇠 *B* 를 *B+B'* 로 증가시키는 것
- 고유진동수는 수정 전과 거의 동일한 값을 갖고, 최대진폭 X_e 는 X_e'로 감소
- 공진주파수 f_n 과 멀리 떨어진 주파수에서의 진폭은 수정 전에 비해 오히려 약간 증가되는 것에 주의 요망
- 이 사실은 진동해석에 있어 일반적으로 중요한 결과는 아님
- 이 방법은 점성감쇠기(viscous damper)를 부착하여 주어진 운전영역 내에서 진동을 감소시키기 위해 적용

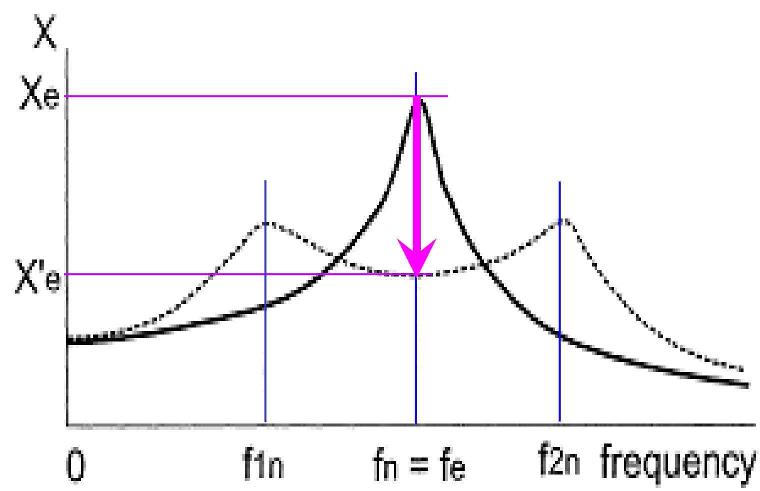


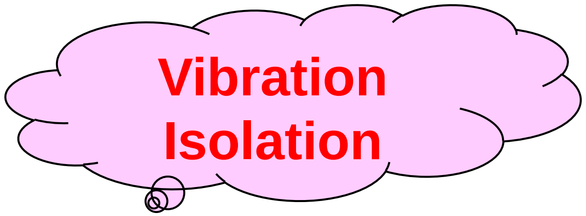


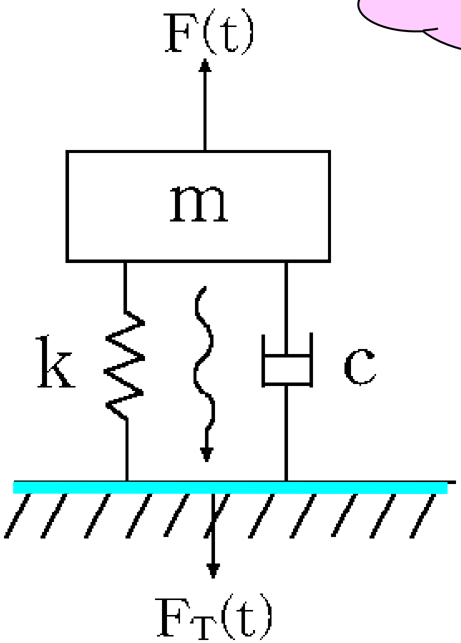
공진응답 저감 방법

- 이러한 대책으로 아직 충분치 못하다면, 진폭 X_e'가 여전히 너무 큰 것을 의미
- 부가적인 질량-탄성계(부진동계)를 부가하는 동흡진기의 부착을 적용해야 함
- 이 경우, 고유진동수 f_n은 2개의 고유진동수(f_{1n} 과 f_{2n})로 분리됨
- 이 새로운 고유진동수는 부가 시스템의 질량 *M* '와 강성 *C* '에 의함
- 이들 주파수에서 진동 크기를 제한하기 위해 감쇠 *B* '를 부가한 시스템에 도입
- 이 부가적인 진동계는 폭 넓은 운전영역에서 응답 크기를 감소 가능
- 주로 크랭크축 자유단 끝에 스프링과 감쇠기를 부가하는 것에 의해 구현

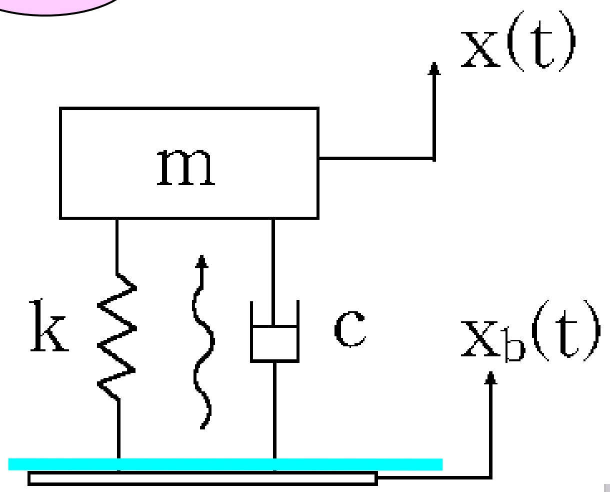




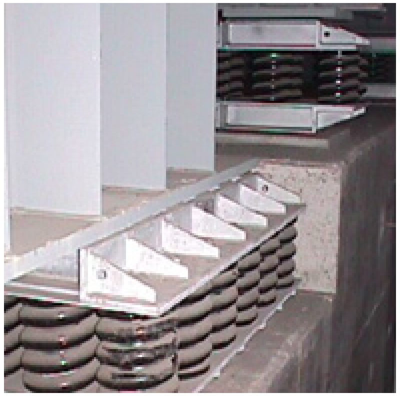




힘의 전달



변위의 전달



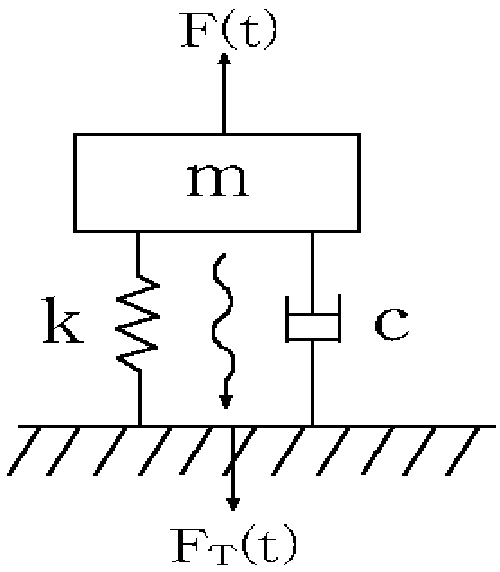
❑ 기계에서 발생하는 가진력 $F(t)$가 스프링 및 감쇠기를 통하여 기초부(foundation)로 전달되는 힘으로,

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$$: 가진력

$$c\dot{x}+kx=F_T(t)$$: 전달력

$$F=(-m\omega^2+ic\omega+k)X$$

$$F_T=(ic\omega+k)X$$



• 힘의 전달율 (기초부로 전달되는 힘 / 기계에 작용하는 힘)

$$TR=\left|\frac{F_T}{F}\right|=\frac{\sqrt{1+[2\zeta(f/f_n)]^2}}{\sqrt{[1-(f/f_n)^2]^2+[2\zeta(f/f_n)]^2}}$$

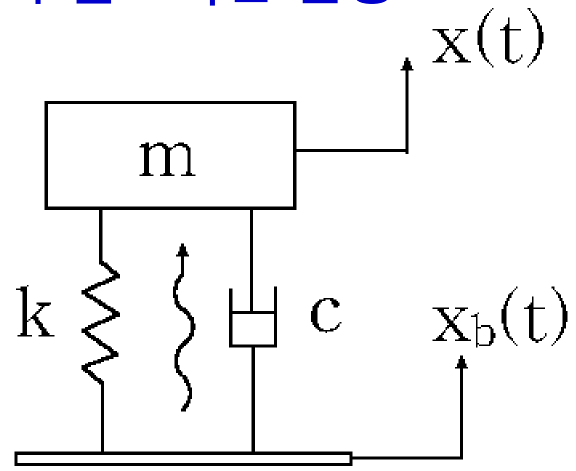
- 기초부(foundation)의 진동에 의해 기계가 일으키는 진동

$$m\ddot{x}+c(\dot{x}-\dot{x}_b)+k(x-x_b)=0$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{x}_b+kx_b$$

$$x = X e^{i\omega t} \qquad x_b = X_b e^{i\omega t}$$

기초부의 진동 변위, 미리 주어짐



$$(-m\omega^2+ic\omega+k)X=(ic\omega+k)X_b$$

- **진동 크기의 비율** (기계의 진동 / 기초부의 진동)

$$TR=\left|\frac{X}{X_b}\right|=\frac{\sqrt{1+[2\zeta(f/f_n)]^2}}{\sqrt{[1-(f/f_n)^2]^2+[2\zeta(f/f_n)]^2}}$$

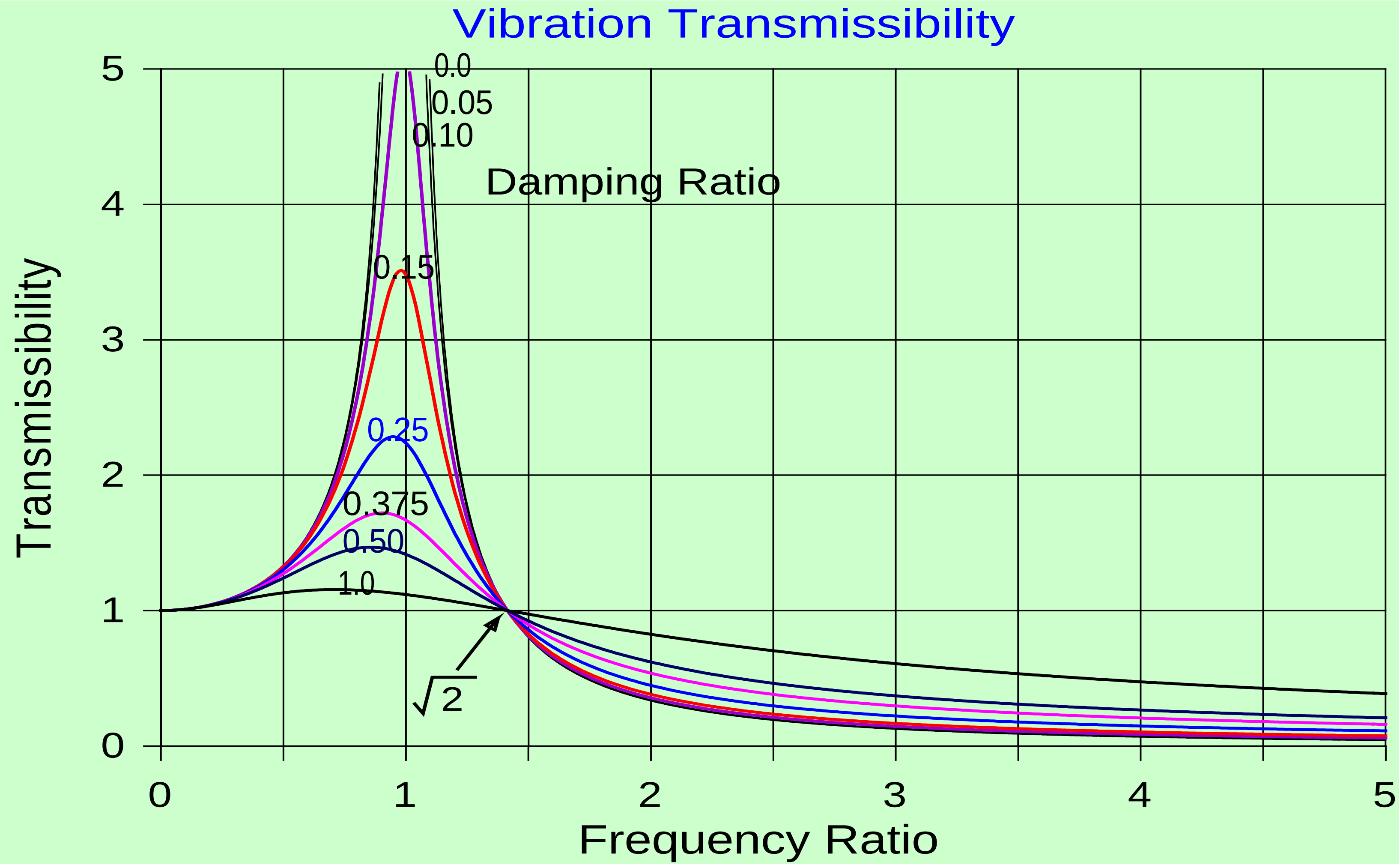
진동 전달률 (Transmissibility)

- 가진력 전달률과 변위 전달률은 동일

$$TR = \frac{\sqrt{1+[2\zeta(f/f_n)]^2}}{\sqrt{[1-(f/f_n)^2]^2+[2\zeta(f/f_n)]^2}}$$

- 공진점 부근에서는 감쇠비가 작을수록 진동 전달률이 증가
- 주파수비 (f/f_n) 가 $\sqrt{2}$일 때, 감쇠비에 관계없이 진동 전달률은 1이 된다.
- 주파수비 (f/f_n) 가 $\sqrt{2}$보다 클 때, 진동 전달률은 1보다 작다.
- 특히 감쇠비가 작을수록 진동 전달률이 더 작아진다.

진동 전달률 (Transmissibility)



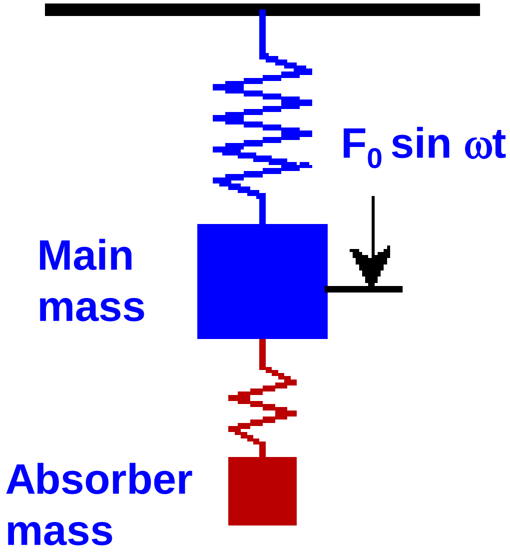
- 주파수비가 $\sqrt{2}$ 보다 클 때, 진동 전달률이 1보다 작아지는 현상 혹은 이를 이용하여 진동을 차단하는 방법

❑ 탄성지지 설계 (resilient mounting design)

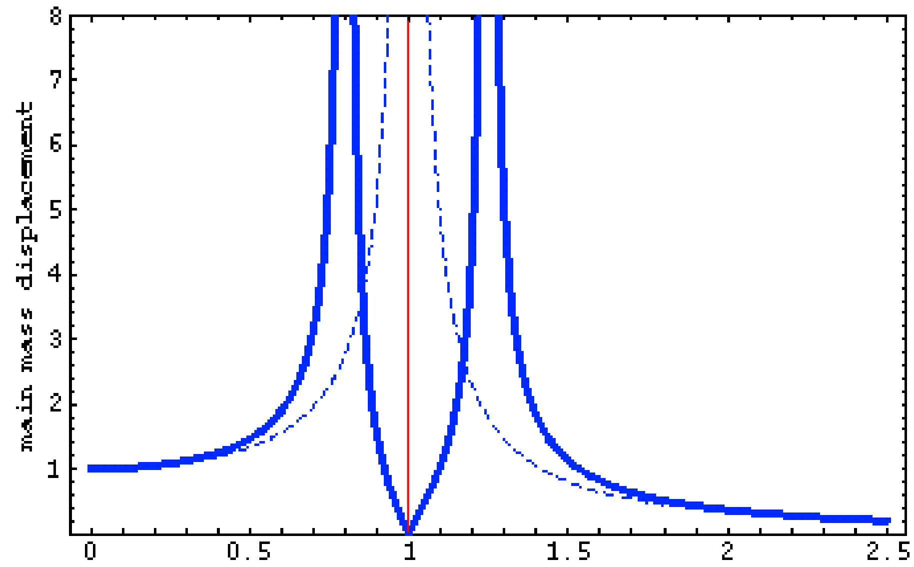
- 진동 절연을 이용한 mounting의 설계
- 운전조건을 공진영역보다 높게 설정
- 하부지지강성을 유연하게 하여 고주파 성분의 진동을 차단
- 감쇠력이 작을수록 진동차단에 좋으나, 공진영역(위험속도) 통과시 진동이 지나치게 커지는 것을 방지하기 위해 최소한의 감쇠력은 필요함
- 주파수비가 3이상, 진동 전달률이 0.1이하가 바람직한 수준

동흡진기(Dynamic Absorber)

- 진동계에 스프링과 질량을 추가하여 조화 가진 되는 주 질량의 응답을 제어
- 진동에너지를 주 질량에서 부 질량으로 이동시켜 진동에너지를 분산



진동 모델



응답 곡선

❑ 주기적 신호(periodic signal)

♣ 형태 :

동일한 형태가 일정한 주기로 반복되는 시간 신호

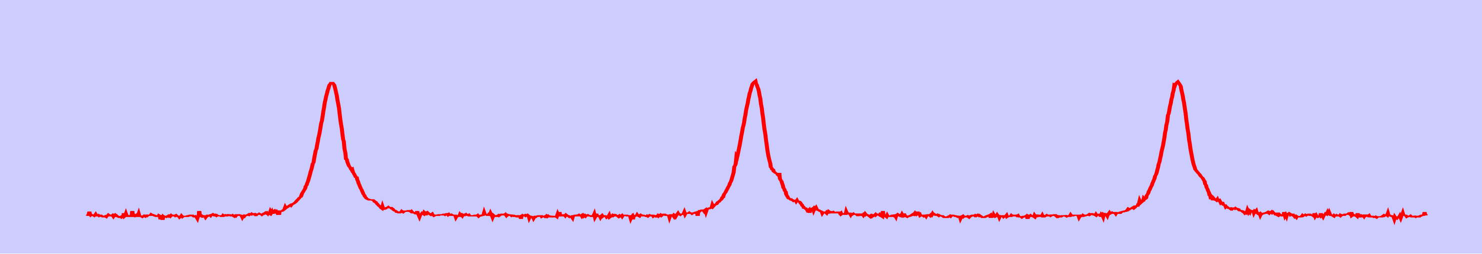
♣ 특성 :

- Fourier급수에 의해 여러 개의 조화 함수로 분해 가능
- 가진력과 진동 응답이 모두 주기적
- 대부분의 기계 시스템에서 발생

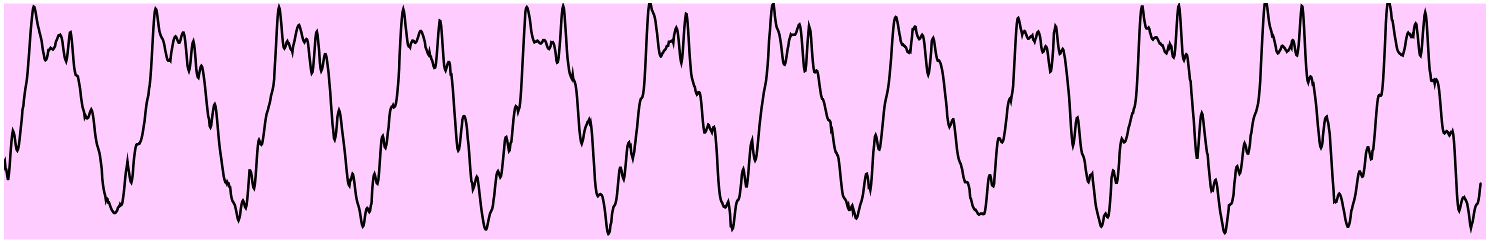
♣ 예 :

- 디젤엔진 연소실 압력, 프로펠러 압력 변동, 터빈 축의 운동, 기어 이의 맞물림 충격, 자동 기관총 소리

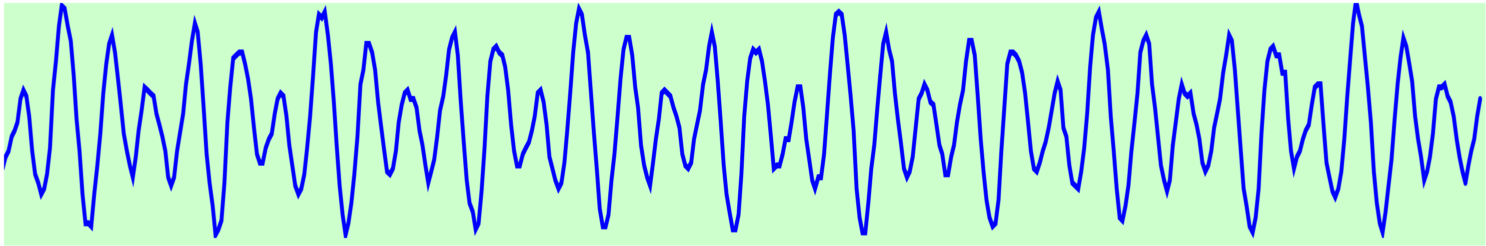
주기적 신호의 예



Diesel engine combustion chamber의 Pressure change



Gas turbine의 Shaft whirling



Ship propulsion shaft의 Torsional vibration

Joseph Fourier :
"어떤 주기적인 함수도 그 기본 주파수의 배수성분 조화함수들의 합으로 이루어 질 수 있다." 즉,

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + ...$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + ...$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$: 평균치

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega t \, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega t \, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Joseph Fourier
(1768～1830)

- ***n* 차 성분 :**

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = c_n \cos(n\omega t - \phi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad \phi_n = \tan^{-1}(b_n / a_n)$$

c_n 는 n차 성분(*n*th order component)의 크기

- **조화계수** (harmonic coefficient)

a_n, b_n (실수 및 허수부)

c_n, ϕ_n (크기 및 위상)

Fourier series, harmonics 등으로 부름

- **고차 성분은 왜 발생하는가?**
- **조화 분석이 왜 필요한가!**

- 기본 주파수 (fundamental frequency) :

  반복적인 파형의 주기에 해당하는 주파수

- 고차 성분(high order) :

  기본 주파수 이외의 배수 조화 성분(2차, 3차, 4차 등)

- 차수(order) :

  기본 주파수를 포함한 조화 성분의 배수 (1차, 2차, 3차 등)

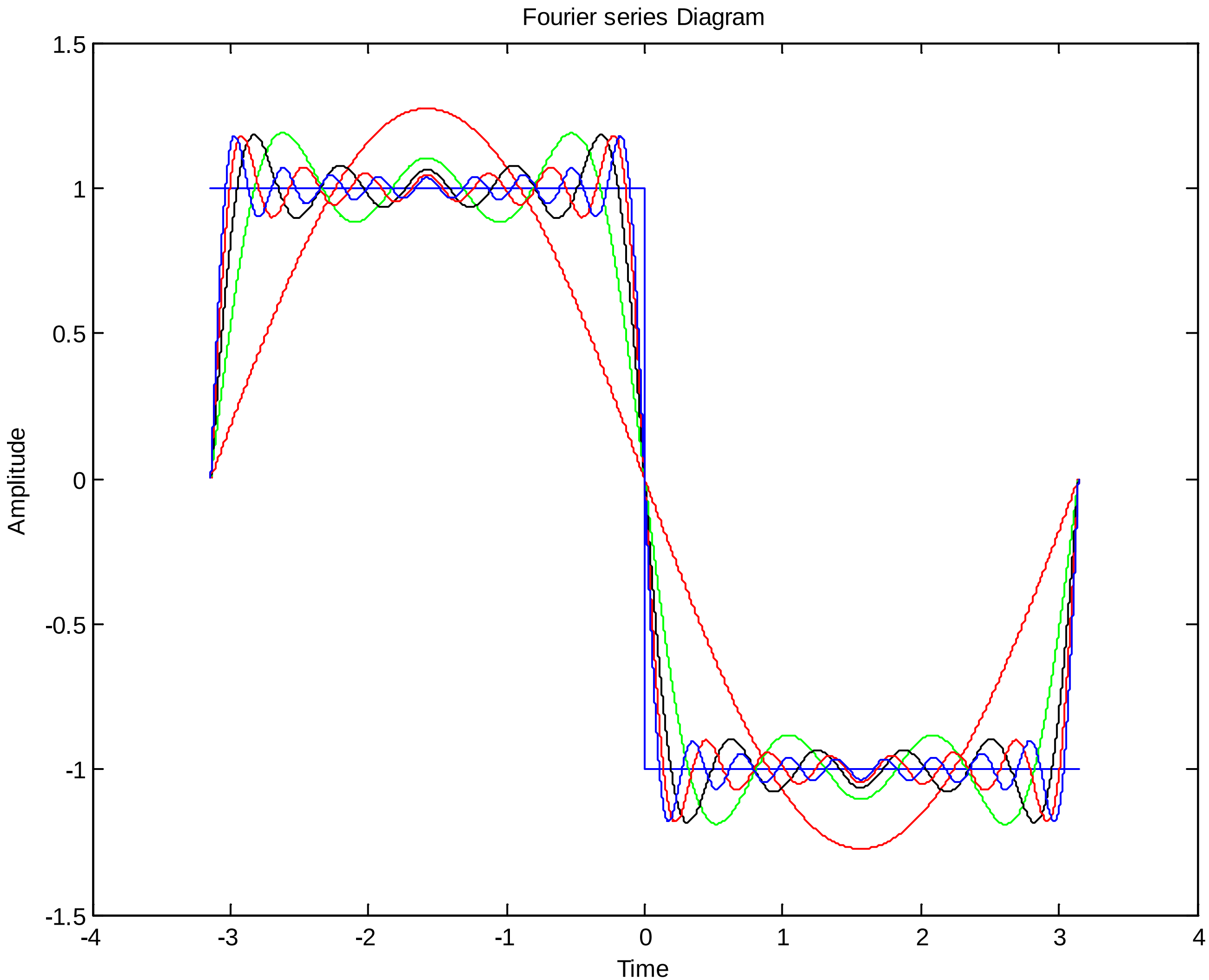
- 고차 성분의 발생 원인 :

  "어떤 주기적인 가진력 혹은 진동의 파형이 단순 조화함수(sine wave)에서 벗어나기 때문”

- 고차 성분이 없는 가진력/진동은 ?

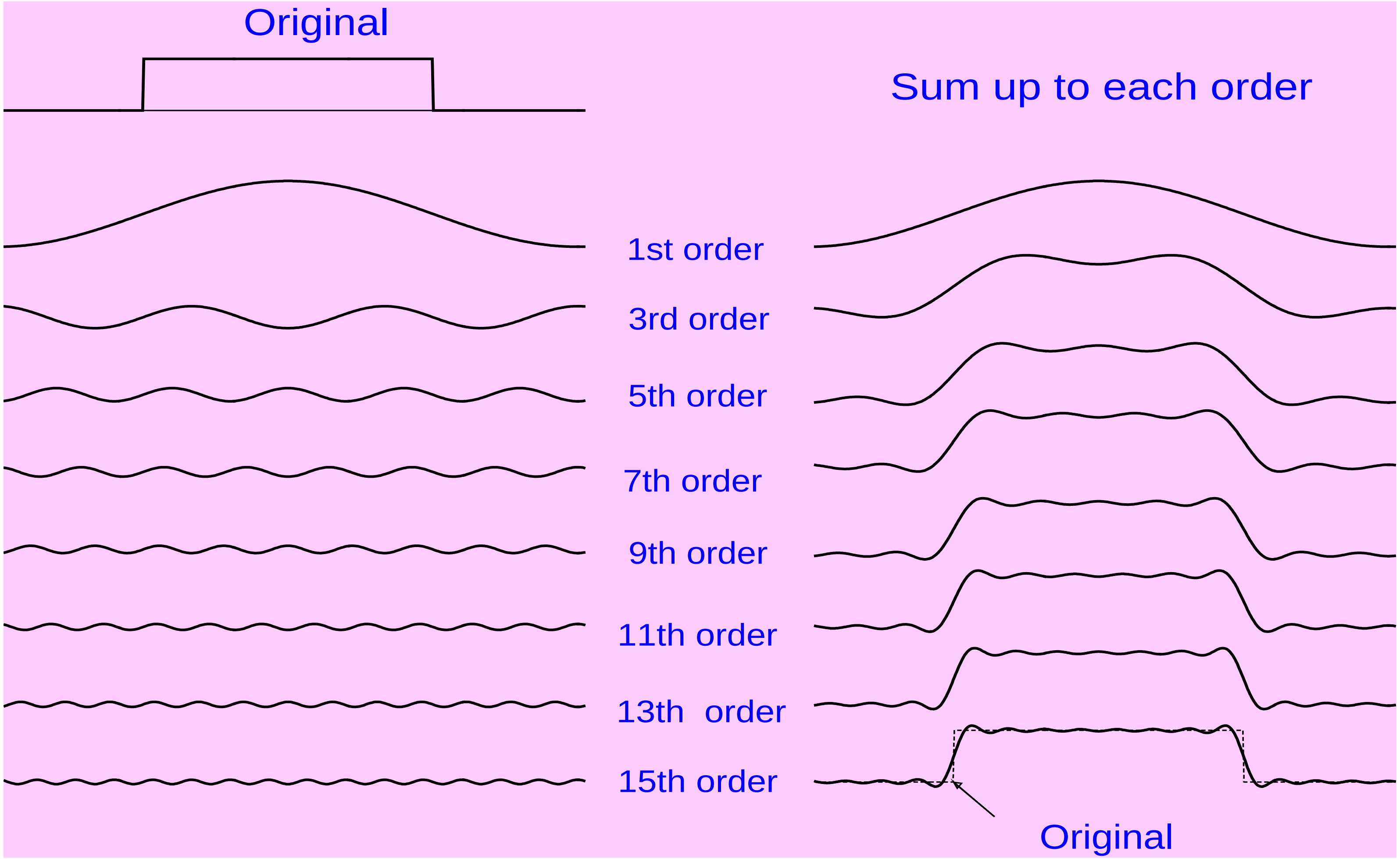
  "완전한 sine파 (sine 및 cosine 함수)를 이루는 경우로서, 불평형에 의한 회전체의 진동이 이에 해당"

조화 분석 및 합성 과정 (1)

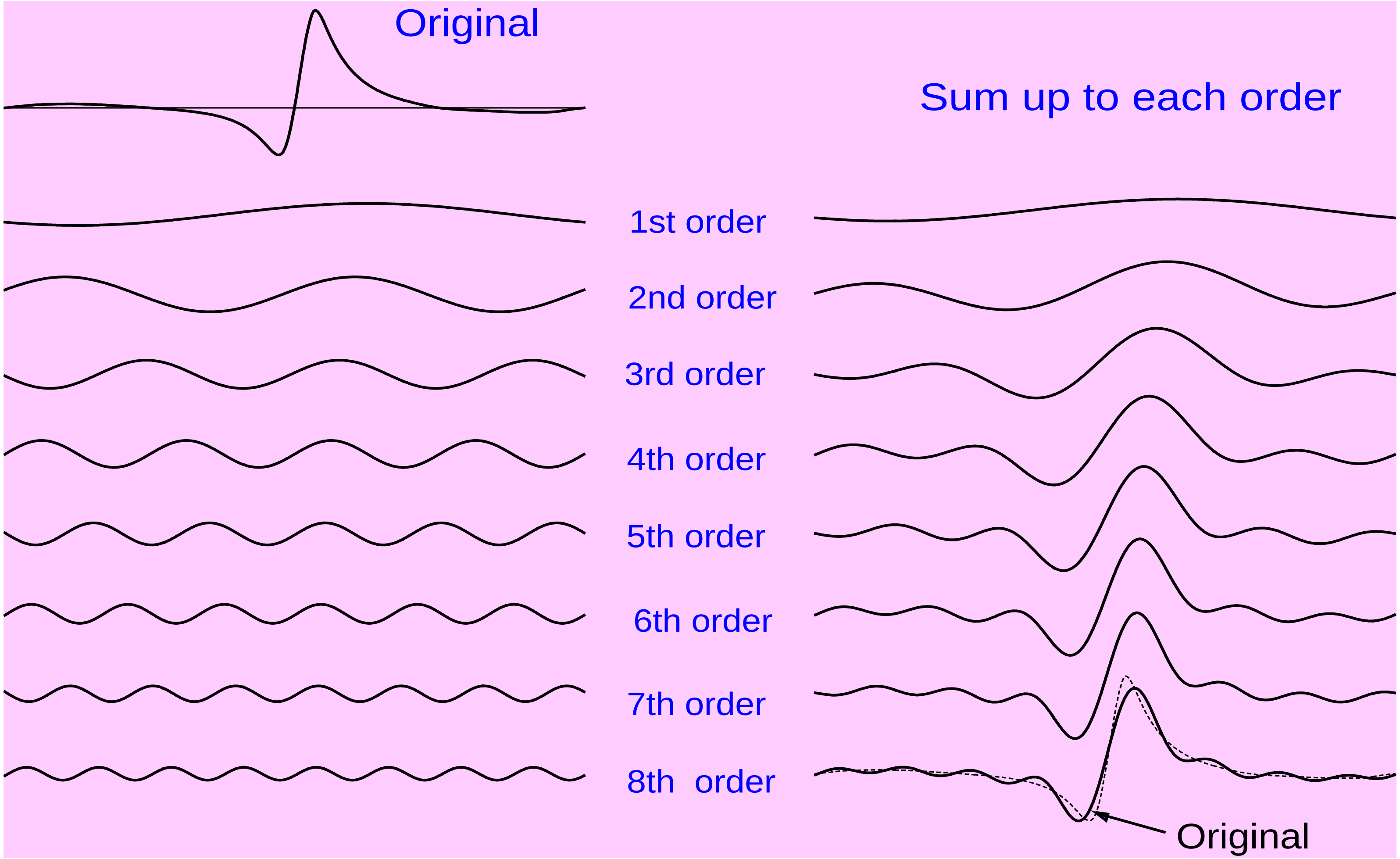


사각파(rectangular wave)의 예

조화 분석 및 합성 과정 (2)



사각파(rectangular wave)의 예



Output torque of single cylinder engine

구 분	연 속 계 (continuous system)	이 산 계 (discrete system)
대 상	실존하는 모든 물리계	단순화된 공학계
질량과 강성의 분포	연속적 분포	이산적 분포(집중)
자유도	무한 자유도	유한 자유도
해석 모델	해석적(analytical)	수치적(numerical)
운동방정식	편미분방정식	상미분방정식
해의 가능범위	특수한 경우에 국한	임의의 형태 가능

❑ 진동 모드(vibration mode)란 ?

다자유도계에서 질량과 강성의 분포에 의해 결정되는 진동의 형태

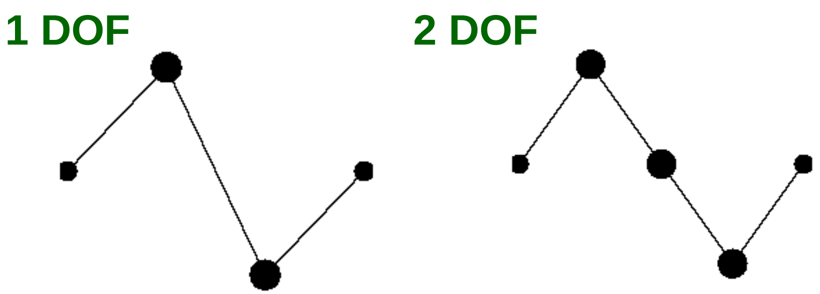
- 진동계 혹은 구조물의 고유한 성질
- 고유진동수와 일대일 대응 관계
- 상대적인 형태만 있고 절대적인 크기는 없다
- 가진력의 특성과는 무관

❑ 진동 모드의 또 다른 이름들

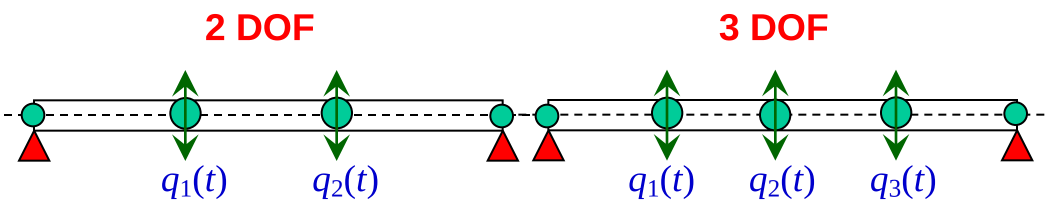
- Mode, Normal Mode, Mode Shape, Mode Vector, Eigenvector, Elastic Curve, Relative Amplitude

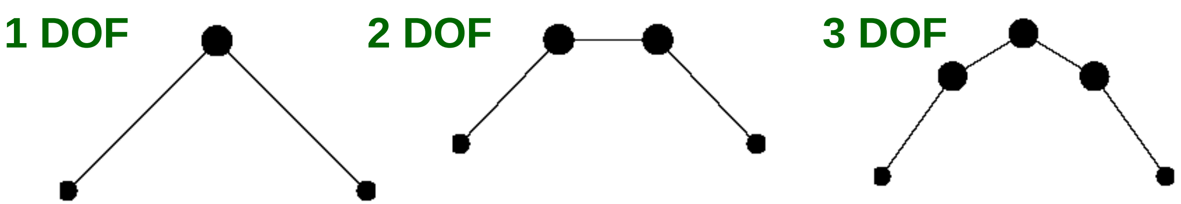
진동 모드 (mode)

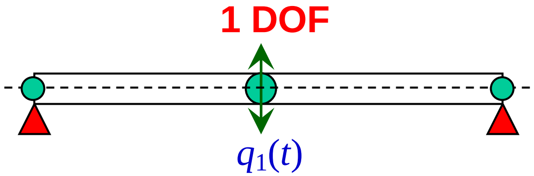
- **단진동계 (1 자유도계)**
  (1 degree of freedom system)
  - 1개의 고유진동수만을 가진다.
- **다 자유도계 (multi-DOF system)**
  - 여러 개의 고유진동수를 가진다.
  - 진동 모드의 개념을 가진다.
  - 고유치 해석이 필요하다.
  - 연속계와 이산계로 구분된다.
  - 대부분의 공학적 시스템에 해당.



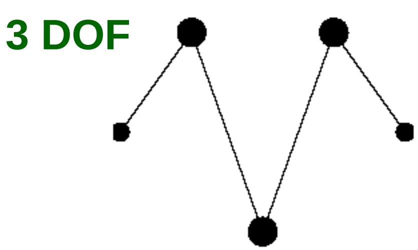
2nd mode







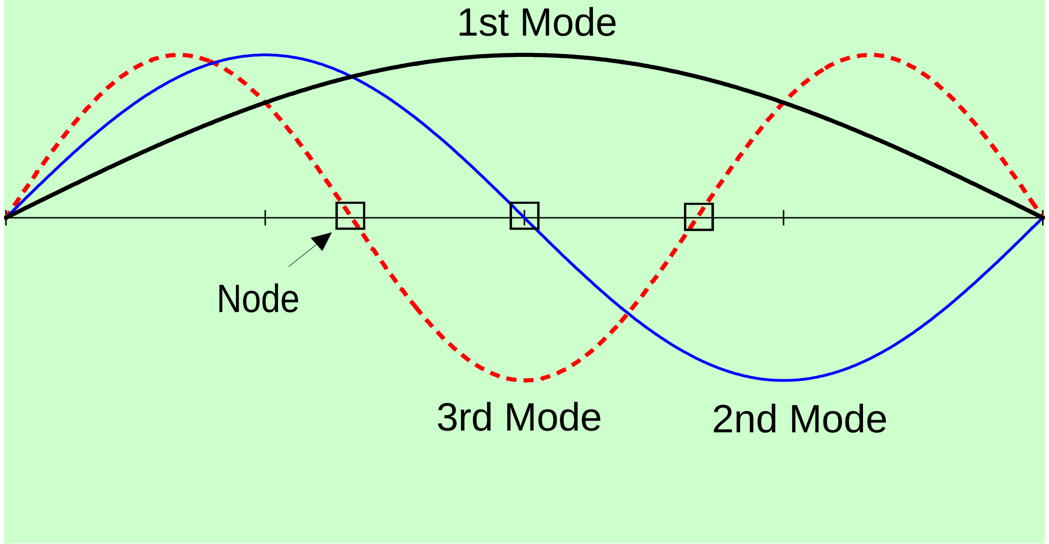
1st mode



3rd mode

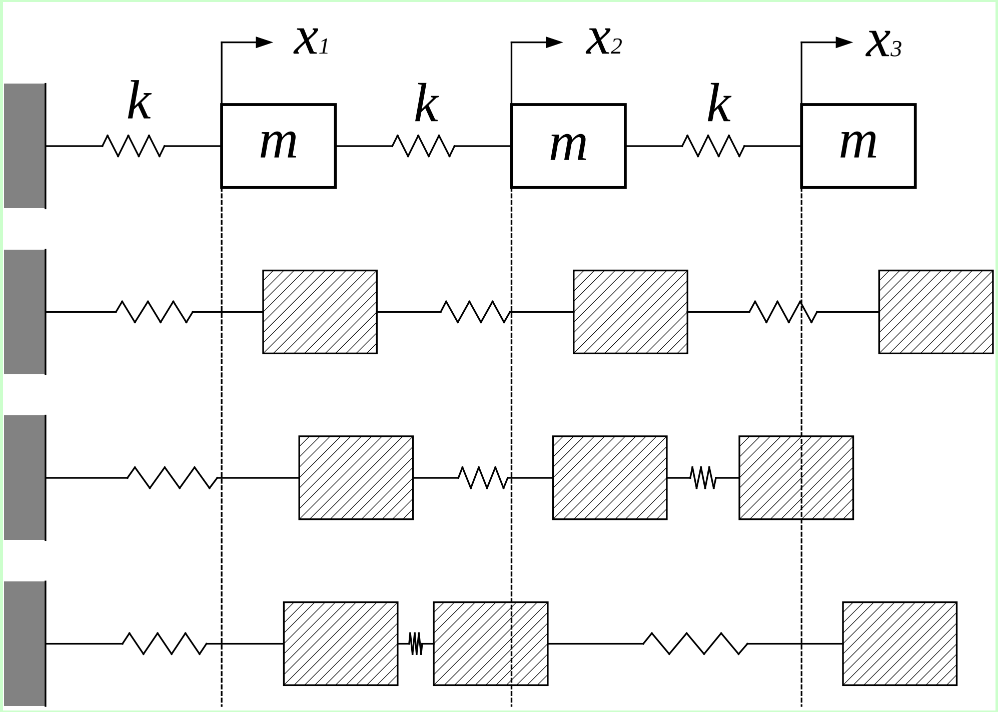
- **고유진동수:** $\omega_n = \dfrac{n\pi}{l}\sqrt{T/\rho}$
- **진동 모드 :** $Y_n(x) = \sin n\pi \dfrac{x}{l}$

(l : 길이, T : 장력, ρ : 단위길이당 질량)



- **연속계 모델**
  - 고유진동수 증가 일정

❑ 모델 :



모드 1 $\omega_1 = 0.4450\sqrt{k/m}$

모드 2 $\omega_2 = 1.2470\sqrt{k/m}$

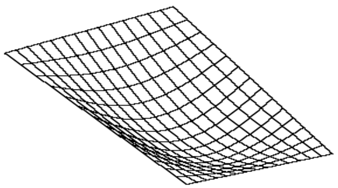
모드 3 $\omega_3 = 1.8019\sqrt{k/m}$

- 이산계 모델
- 고유 진동수 증가가 일정하지 않음

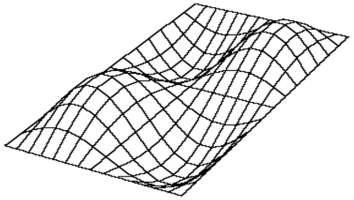
평판의 진동 모드 예

Plate

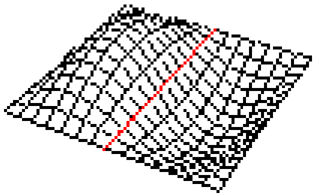
(1, 1)



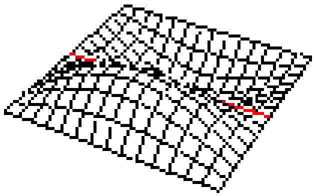
(2, 2)



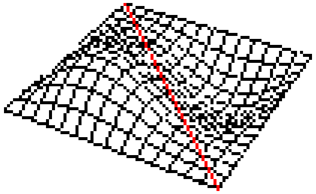
(2, 1)



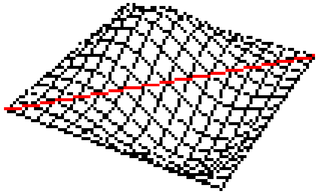
(1, 2)



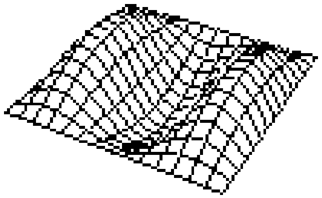
(2, 1)+(1, 2)



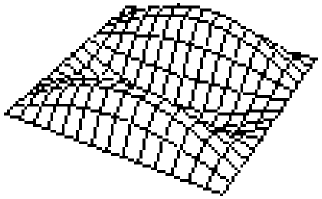
(2, 1)-(1, 2)



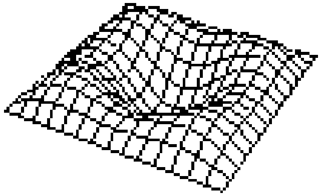
(3, 1)



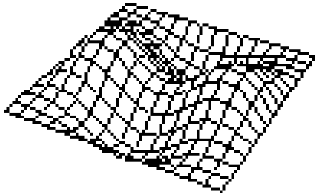
(1, 3)



(3, 1)+(1, 3)



(3, 1)-(1, 3)

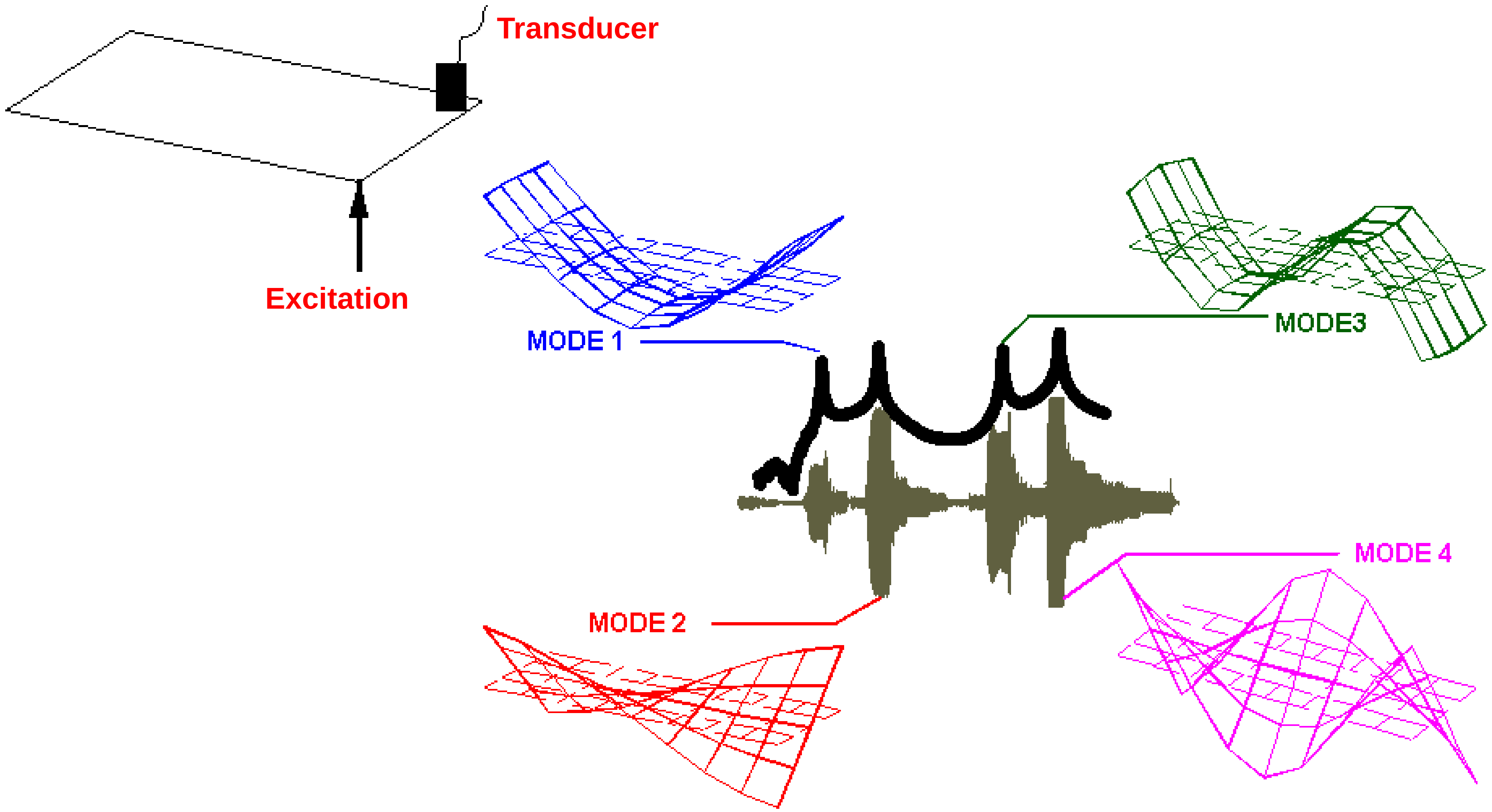


조화계수와 진동 모드의 비교

구분	조화 계수	진동 모드
영역	시간적 영역	공간적 영역
정의	시간상의 파형	공간상의 진동 형태
차수	***n*차 성분 (*n*th order)**	***n*차 모드 (*n*th mode)**
개수	여러 개의 차수 성분	여러 개의 진동 모드
주파수	반드시 정수배로 증가	단순 증가 혹은 중복
계산	조화 분석	고유치 해석
직교성	성분사이 존재	모드사이 존재
진동계	가진력/진동응답의 특성	구조물의 고유특성

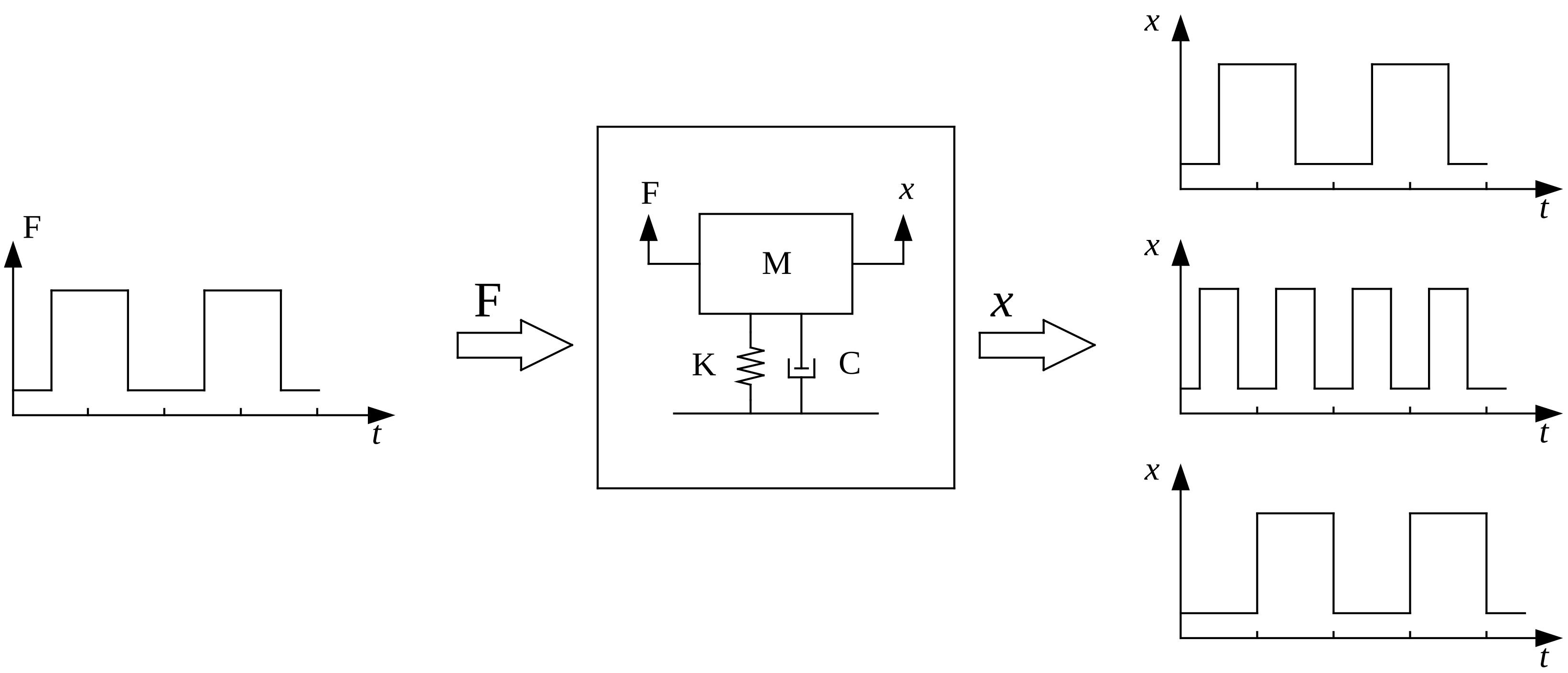
직교성 : 2개의 벡터간의 스칼라 곱이 0으로 되는 특성

모드 해석(modal analysis)



진동계의 응답 예측

그림과 같이 사각파형으로 가진 되는 단진동계의 응답은 ?

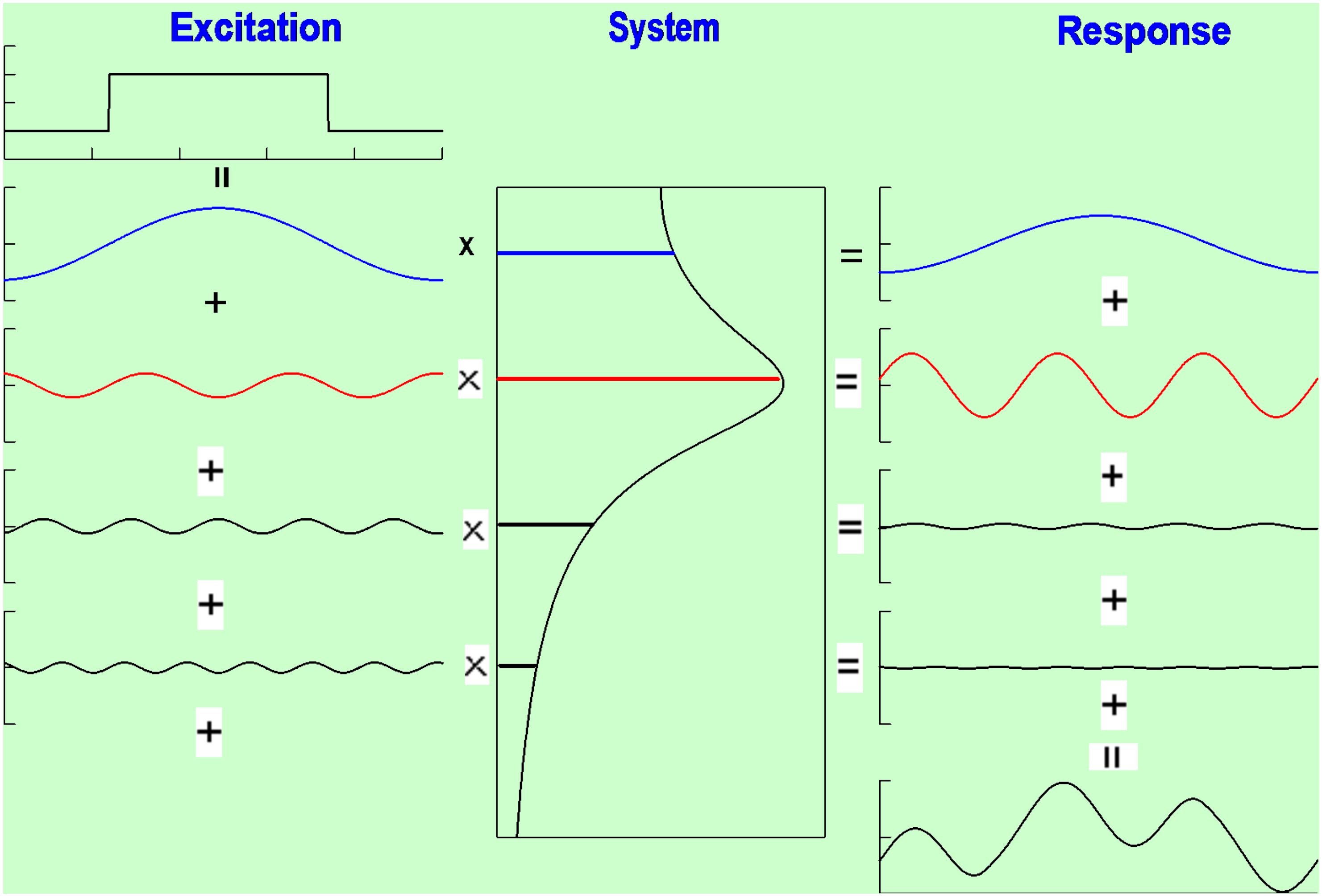


Input (Force)

System

Output (Response)

- 선형 중첩의 원리, 조화 분석의 필요성



♣ 복잡한 지배 방정식

- 정적 구조해석

$$\mathbf{K}\,\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

- 진동 방정식

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$$

♣ 난해한 개념

- 가진력(exciting force)
- 조화 성분(harmonics)
- 고유진동수(natural frequency) 및 모드(mode)

♣ **진동의 평가 (Vibration assessment) :**

- 진동 측정 및 평가의 기준 수립
- 기계의 건전성 평가

♣ **기계의 특성 및 상태 파악 :**

- 상태 감시 및 진단 **(condition monitoring & diagnosis)**
- 체계적인 예측 보수 가능 **(prediction & maintenance)**

♣ **진동 방지 (저진동) 설계 :**

- 엄격해지는 환경 및 안전 기준 만족
- 기계의 진동 품질**(vibration quality)** 확보

- ♣ **Self-study & Presentation**
  - **Presentation material using Power Point File**